DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
IV. kötet, 2016

doi:10.20312/dim.2016.08

Lehűlési folyamat vizsgálata középiskolai módszerekkel

Barta Edit
NymE EMK Matematikai Intézet
barta.edit@nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Egy konkrét példán keresztül szeretném bemutatni, hogy a lehűlési és azzal analóg folyamatok hogyan tárgyalhatók középiskolai matematikai módszerekkel, és az eredmény hogyan egyeztethető össze a differenciálegyenlettel való megoldás eredményével.

ABSTRACT. I wish to present a possible treatment of cooling-, and analogous processes using only basic mathematical techniques for solving a proper example. I compare the result to the solution gained by a differential equation.

1. Bevezetés

A középiskolai fizika oktatása során jó néhány példa található arra, hogy a tárgyalt jelenség analitikai megközelítését olyan problémák teszik lehetetlenné, hogy a diák nincs birtokában azoknak a matematikai ismereteknek, amelyek az adott probléma megoldását egzaktul szolgáltatnák. Egyik ilyen jelenségcsoport a lehűlési folyamatok és az azzal analóg jelenségek, mint például a radioaktív bomlás, vagy az egyenáramú áramköröknél az áram megszakításakor lejátszódó tranziens jelenségek. De ezekhez hasonlóan tárgyalhatók a telítődési jellegű folyamatok, mint például az adott külső hőmérsékletre történő felmelegedés vagy az áram bekapcsolásakor lejátszódó tranziens folyamatok. A közös bennük az, hogy hasonló alakú differenciálegyenlet írható fel mindegyik folyamatra, amelynek a megoldása egyszerű, ámde a differenciál- és integrálszámítást nem tanuló középiskolásnak nem tálalható. Néhány esetben viszont – amikor a feladat számadatai „szépek” – az egzakt megoldást szolgáltató függvény egészen jól közelíthető csak középiskolás matematikai eszközöket felhasználva. Ennek bemutatására alkalmas az alábbi feladat, amely évekkel ezelőtt a Nyugat-magyarországi Egyetemen oktatott Matematika II. tantárgy differenciálegyenletek témakörének bevezető példája volt [1]. Ezt a feladatot éppen „szép” számadatai és viszonylag egyszerű, ámde ötletet kívánó megoldása miatt kitűztük a 2016-os Vermes Miklós Nemzetközi Fizikaverseny Hőtan kategóriájában is [2].

2. A konkrét feladat

„A kemencéből kiszedett kenyér hőmérséklete 120 °C, 30 perccel később 60 °C. Mikor lesz a kenyér hőmérséklete 40 °C, ha az időben állandó külső hőmérséklet 30 °C? A megoldáshoz alkalmazza a Newton-féle lehűlési törvényt, mely szerint egy test hőmérsékletváltozásának a sebessége arányos a test és a környezete közötti hőmérsékletkülönbséggel.”

3. Megoldások

Három megoldást fogok ismertetni, amelyekből az első az egzakt hőmérséklet-idő függvényt szolgáltató differenciálegyenletes megoldás, a másik kettő pedig a középiskolásoknak is bemutatható eljárás. Mindhárom megoldás során használjuk a következő jelöléseket:

T, $T(t)$: a kenyér pillanatnyi hőmérséklete,
T_0 : a kenyér kezdeti hőmérséklete (T_0 = 120 °C),
T_k : a külső hőmérséklet (T_k = 30 °C),
t_m : a későbbi mérésig eltelt idő (t_m = 30 perc),
T_m : a t_m időpontban mért hőmérséklet (T_m = 60 °C).

1. Megoldás

A Newton-féle lehűlési törvény differenciális alakja:

$$\frac{dT}{dt} = \propto (T - T_k).$$

Ez egy szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenlet, melynek a kezdeti feltételeket is figyelembe vevő megoldása:

$$T(t) = (T_0 - T_k)e^{\propto t} + T_k,$$

ahol α 1/idő dimenziójú mennyiség, a későbbi időpontban mért eredményekből meghatározandó állandó. Behelyettesítve a mért adatokat a megoldásba:

$$T_m = (T_0 - T_k)e^{\propto t_m} + T_k,$$

$$\propto = ln\left(\frac{T_m - T_k}{T_0 - T_k}\right)^{\frac{1}{t_m}}$$

kifejezést kapjuk α-ra. Ezt visszahelyettesítve a megoldásba és az átalakításokat elvégezve a következő exponenciális függvényt kapjuk a kenyér pillanatnyi hőmérsékletére:

$$T(t) = (T_0 - T_k)\left(\frac{T_m - T_k}{T_0 - T_k}\right)^{\frac{t}{t_m}} + T_k. \qquad (1)$$

Általában α-t vagy kiszámolják szám szerint, és beírják e kitevőjébe, vagy kísérletekből meghatározandó paraméterként tüntetik fel, de a hőmérséklet-idő függvényt mindenképpen e alapú exponenciális függvényként írják fel. Most azért célszerű mégis paraméteresen visszahelyettesítenünk az e alapú függvénybe és egyszerűsítenünk, hogy az így kapott megoldást össze tudjuk hasonlítani a középiskolás megoldás eredményével.

Megjegyezzük, hogy a radioaktív bomlástörvényt is két alakban szokták megadni, az egyik ($N = N_0 e^{-\lambda t}$) e, a másik ($N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$) 2 alapú exponenciális függvény. A λ bomlási állandó és a T felezési idő között analóg kapcsolat áll fenn, mint esetünkben az α és a t_m között.

2. Megoldás

A lehűlési törvény értelmében

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \sim T - T_k.$$

Célszerűen Δt-t válasszuk 1 percnek, ez „elég kicsi”. Így a lehűlési törvény alakja:

$$\Delta T = c(T - T_k),$$

ahol ΔT az 1 percre jutó hőmérsékletcsökkenés, c a mért eredményekből meghatározandó arányossági tényező.

Jelölje ΔT_0 a [0;1], ΔT_1 az [1;2], ΔT_2 a [2;3], …, ΔT_{n-1} az [n-1;n], … perc időintervallumban bekövetkező hőmérsékletcsökkenést (pozitív előjellel!), T_0, T_1, T_2, … T_n … pedig a kenyér hőmérsékletét a t = 0, 1, 2, … n, … perc időpillanatokban. A megoldást T_n fogja szolgáltatni.

A hőmérsékletcsökkenésekre felírható:

$$\Delta T_0 = c(T_0 - T_k) = cT_0 - cT_k,$$
$$\Delta T_1 = c(T_1 - T_k) = cT_1 - cT_k,$$
$$\Delta T_2 = c(T_2 - T_k) = cT_2 - cT_k,$$
$$\vdots$$
$$\Delta T_{n-1} = c(T_{n-1} - T_k) = cT_{n-1} - cT_k,$$
$$\vdots$$

A hőmérsékletekre felírható:

$$T_1 = T_0 - \Delta T_0 = T_0 - cT_0 + cT_k = T_0(1 - c) + cT_k,$$
$$T_2 = T_1(1 - c) + cT_k,$$
$$T_3 = T_2(1 - c) + cT_k,$$
$$\vdots$$
$$T_n = T_{n-1}(1 - c) + cT_k,$$
$$\vdots$$

Ily módon az egész percekben mérhető hőmérsékletekre egy rekurzív módon megadott sorozatot írtunk fel. Ennek általános tagja a behelyettesítéseket és megfelelő kiemeléseket végrehajtva a következő alakban írható fel:

$$T_n = T_0(1 - c)^n + cT_k[(1 - c)^{n-1} + (1 - c)^{n-2} + \cdots + (1 - c) + 1].$$

A szögletes zárójelben levő összeg egy olyan mértani sorozat első n tagjának az összege, amelynek első tagja 1, kvóciense (1-c). Zárt formában felírva az összeget:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1\,\frac{(1 - c)^n - 1}{1 - c - 1} = \frac{1 - (1 - c)^n}{c}.$$

Ezt behelyettesítve T_n-be és az átalakításokat elvégezve kapjuk:

$$T_n = (T_0 - T_k)(1 - c)^n + T_k.$$

A c paramétert illetve az 1-c mennyiséget a 30. perc végén mért hőmérsékletből határozhatjuk meg.

$$T_m = (T_0 - T_k)(1 - c)^m + T_k$$

$$1 - c = \left(\frac{T_m - T_k}{T_0 - T_k}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Visszahelyettesítve a következő megoldást kapjuk:

$$T_n = (T_0 - T_k)\left(\frac{T_m - T_k}{T_0 - T_k}\right)^{\frac{n}{m}} + T_k. \tag{2}$$

Megoldásunk tehát egy számsorozat, méghozzá egy mértani sorozat, amelynek tagjai az egész percekben mérhető hőmérsékletet adják meg.

Hasonlítsuk össze (1)-gyel, azaz a differenciálegyenlettel kapott megoldással! Látható, hogy a két megoldás teljesen hasonló, mindössze annyi a különbség, hogy míg (1) folytonos függvény, amelynek értelmezési tartománya a nem negatív valós számok, addig (2) egy olyan diszkrét függvény, amelynek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza. Az egész percnyi időpillanatokban a két függvény azonos értékeket vesz fel. De ennél több is teljesül: ha az időt továbbra is percekben számoljuk, akkor tetszőleges, nem feltétlenül egész percet is behelyettesíthetünk (2)-be, a kapott hőmérsékleti érték pontos lesz! Egyetlen átírással (*n* helyett *t*) folytonossá tehetjük a sorozatunkat, és megkapjuk az egzakt megoldást.

A konkrét feladat megoldása adatainkkal:

$$T_n = 90\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{30}} + 30,$$

illetve

$$T(t) = 90\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{30}} + 30$$

A feladat kérdése, hogy mely n-re lesz T_n = 40 °C.

$$40 = 90\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{30}} + 30$$

Az exponenciális egyenletet megoldva n = 60 adódik, tehát 60 perc múlva lesz a kenyér hőmérséklete 40 °C.

3. Megoldás

Van az előzőnél egyszerűbb megoldás is, amely azon az ötleten alapul, hogy a hőmérsékleti skála nullpontját eltoljuk +30 °C-ba. Ezt megtehetjük, hiszen mind a hőmérséklet*változás*, mind pedig a hőmérséklet*különbség* független attól, hogy a hőmérsékleti skálán hol helyezkedik el a nullpont. A kiinduló adatok és a feladat kérdése a következőképpen módosul: T_0 = 90 °C, T_{30} = 30 °C, T_k = 0 °C. Mikor lesz a kenyér hőmérséklete 10 °C?

A lehűlési törvényalakja:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \sim T.$$

Δt-t most is 1 percnek választjuk, így

$$\Delta T = cT.$$

Az (n-1)-edik hőmérsékletváltozás:

$$\Delta T_{n-1} = cT_{n-1},$$

a hőmérsékletek:

$$T_1 = T_0 - \Delta T_0 = T_0 - cT_0 = T_0(1-c)$$
$$T_2 = T_1 - \Delta T_1 = T_1 - cT_1 = T_1(1-c) = T_0(1-c)^2$$
$$\vdots$$
$$T_n = T_0(1-c)^n$$
$$\vdots$$

A mért értéket behelyettesítve:

$$1 - c = \left(\frac{T_m}{T_0}\right)^{\frac{1}{m}},$$

a keresett függvény:

$$T_n = T_0\left(\frac{T_m}{T_0}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

A módosított adatok behelyettesítését és a végeredmény számszerű kiszámolását az olvasóra bízom.

Látható, hogy ez utóbbi megoldás sokkal egyszerűbb az előzőnél, hátránya, hogy nem minden esetben alkalmazható.

4. Összefoglaló

Írásomban két lehetséges módszert ismertettem az exponenciális lecsengésű folyamatok középiskolai matematikai eszközökkel való tárgyalására. A konkrét feladatot a verseny résztvevői közül senki nem az általam megadott megoldások valamelyikével dolgozta ki. Éppen a feladat „szép” számadatai tették lehetővé a feladat végeredményének megsejtését: „ha 30 perc alatt a kezdeti hőmérséklet a külsőhöz képest kétharmadára esik vissza, akkor innen további kétharmadára is feltételezhetően ugyanannyi idő alatt esik vissza.” Ezen megsejtéshez alkotott a diákok egy része képletet, levezetést, és kapott helyes eredményt. Egy versenyző próbálkozott differenciálegyenlettel (ő birtokában volt ennek az ismeretnek), egy pedig megsejtette, hogy az ilyen jellegű folyamat „valami exponenciális függvénnyel írható le”, és ezen gondolat alapján oldotta meg a feladatot helyesen. Tanulság: a túlságosan szép számadatok néha megfosztják a tanárt attól a lehetőségtől, hogy megmutassa az általánosabb, szélesebb körben is alkalmazható megoldást.

Irodalomjegyzék

[1] **Horváth, J.,** Matematika II., Egyetemi jegyzet, Soproni Egyetem, EMK, Matematikai Intézet, Sopron, (1998), p. 42.

[2] Hőtan kategória feladatlapja, Vermes Miklós Fizikaverseny, 2016.