MATEMATIKA ÉS FIZIKA

A BERZSENYI DÁNIEL TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI X. TERMÉSZETTUDOMÁNYOK 5.
Szombathely, 1996. 3-25.

HORVÁTH JENŐ – NÉMETH LÁSZLÓ[1]

IDEÁLIS SZIMPLEXEK A HIPERBOLIKUS TÉRBEN

Abstract: Let us extend the d-dimensional hyperbolic space with its ideal and ultraideal points. In this paper we examine the basic properties of the ultraideal triangles in the extended hyperbolic plane. In the 3-dimensional hyperbolic space we deal with the properties of the equifaced tetrahedra for the possible types of tetrahedra on the base of the results of J. HORVÁTH (1969) and BUI VAN DUNG (1985a, 1985b) for ordinary tetrahedra and tetrahedra with ultraideal vertices and real edges. Finally we consider the case in the d-dimensional hyperbolic space, where all the faces of the simplex are the same type in accordance with the results of H. MARTINI (1993) for regular simplices.

1. Bevezetés

Tekintsük a 3-dimenziós $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus teret. Egy $\mathbb{H}^2$ síkban fekvő két egyenes kölcsönös helyzete 3 féle lehet, éspedig metsző, párhuzamos és nem metsző (divergens). Bővítsük ki a $\mathbb{H}^3$ teret úgy, hogy két párhuzamos egyeneshez hozzárendelt pontot végtelen távoli pontnak, két nem metsző, de közös síkban levő egyeneshez rendelt pontot ideális pontnak nevezünk, a $\mathbb{H}^3$ tér pontjait pedig valós (közönséges) pontoknak. A végtelen távoli és ideális pontokkal bővített teret $\overline{\mathbb{H}}^3$-mal jelöljük. Így a $\overline{\mathbb{H}}^2$ síkban lesznek valós, végtelen távoli és ideális tartópontú sugársorok. Az utóbbi a sík egy valós egyenesére merőleges egyenesek közös pontja.
A Cayley–Klein-féle kör, ill. gömbmodellt (C-K modell) tekintjük az ideális elemekkel bővített euklideszi síkban, ill. térben. Valós (közönséges) pontok a kör, ill. gömb belső pontjai, végtelen távoli pontok a körvonal, ill. gömbfelület pontjai és ideális pontok pedig a külső pontok. Ide számítjuk az euklideszi sík, ill. tér ideális (végtelen távoli) pontjait is.
Egy egyenest közönségesnek (valósnak) nevezünk, ha van közönséges pontja (metszi az alapkört, ill. alapgömböt), izotropnak, ha egyetlen végtelen távoli pontja van (érinti az alapkört, ill. alapgömböt), és ideálisnak, ha csak ideális

[1] Soproni Egyetem, Matematikai Intézet, Sopron, e-mail: jhorvath@efe.hu, lnemeth@efe.hu

pontjai vannak. Hasonló elnevezést használhatunk a térben is (közönséges egyenes, sík; izotrop egyenes, sík; ideális egyenes, sík).

Dolgozatunkban a háromszögek és tetraéderek közül azokkal foglalkozunk, amelyeknek mindegyik csúcsa, élegyenese, vagy lapjának síkja azonos típusú (valós, izotrop, ideális). Ily módon a háromszögeknek és tetraédereknek a következő típusai lehetnek:

1.1. Háromszögek típusai:

1.1.1. Közönséges (valós csúcspontú)
1.1.2. Határ, vagy aszimptotikus (végtelen távoli csúcspontú)
1.1.3. Ideális csúcspontú, valós oldalegyenesű
1.1.4. Izotrop oldalegyenesű
1.1.5. Ideális (ideális oldalegyenesű)

1.2. Tetraéderek típusai:

1.2.1. Közönséges (valós csúcspontú)
1.2.2. Határ, vagy aszimptotikus (végtelen távoli csúcspontú)
1.2.3. Ideális csúcspontú, valós oldalegyenesű
1.2.4. Izotrop oldalegyenesű
1.2.5. Ideális oldalegyenesű, valós lapsíkú
1.2.6. Izotrop lapsíkú
1.2.7. Ideális (ideális lapsíkú).

Bui Van Dung (1985b) az 1.1.3. típusú háromszögek elemi tulajdonságait vizsgálta. Az első szerző javaslatára szögnek nevezte a két nem metsző egyenes távolságát. Ennek felhasználásával a közönséges háromszögben ismert elemi tételek megfelelőjét vizsgálta az 1.1.3. típusú háromszögekre. Dolgozatunk 2. fejezetében ezek analógiáit vizsgáljuk ideális háromszögekre. (Az 1.1.2. és 1.1.4. típusú háromszögeket nem kell vizsgálnunk, hiszen azok típuson belül egybevágók.)

Horváth J. (1969) az egyenlő oldalú tetraéderek tulajdonságait vizsgálta állandó görbületű terekben. *Bui Van Dung* (1984, 1985a) közönséges egyenlő oldalú tetraéderekre ismert tulajdonságok megfelelőjét vizsgálta az 1.2.3. típusú tetraéderekre. A 3. fejezetben további tulajdonságait vesszük az egyenlő oldalú tetraédereknek, majd ezen tulajdonságok megfelelőjét vizsgáljuk a maradék típusú (1.2.2., 1.2.4.–1.2.7.) tetraéderekre.

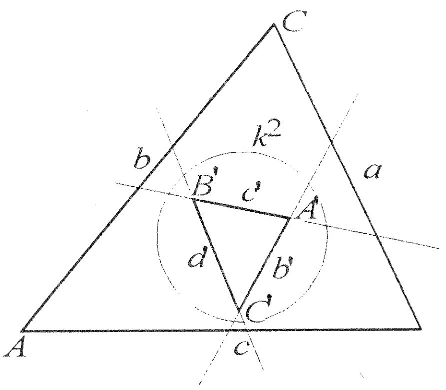
Végül a 4. fejezetben *Martini, H.* (1993) eredményeinek megfelelőjét nézzük végtelen távoli és ideális pontokkal kibővített d–dimenziós (d>3) hiperbolikus terekben ($\overline{\mathbb{H}}^d$).

2. Ideális háromszögek

Három ideális egyenes a fenti modellben (a projektív síkon) négy háromszöget határoz meg. E négy ideális háromszög közül *normál ideális háromszög*nek nevezzük azt, amelyik tartalmazza a Cayley-Klein-féle körmodell k^2 alapkörét. Minden egyeneshez (nemcsak valós egyeneshez) egyértelműen hozzárendelünk egy pontot (a Cayley-Klein-féle modellben az egyenes k^2-re vett pólusát). Így minden ideális háromszöghöz egyértelműen hozzárendelhetünk egy valós háromszöget úgy, hogy az ideális háromszög oldalainak, ill. csúcsainak a valós háromszög csúcsai, ill. oldalai felelnek meg. Nevezzük e valós háromszöget az ideális háromszög *társháromszögé*nek. Egy valós háromszög társháromszögének pedig a hozzá tartozó négy ideális háromszög közül a normál ideális háromszöget nevezünk. Hasonlóan társháromszögek az 1.1.2. és 1.1.4. háromszögek, de ezek mind egybevágók. Az 1.1.3 háromszög társháromszöge 1.1.3 típusú, ezek tulajdonságaival BUI VAN DUNG (1985b) foglalkozott.

2.1. Társháromszögek

Egy normál ideális háromszögről feltehetjük, hogy euklideszi értelemben is tartalmazza a k^2 kört, mert ha nem tartalmazná, akkor a társháromszögére alkalmazhatunk egy egybevágósági transzformációt (eltolást) úgy, hogy az így kapott valós háromszög társháromszöge már euklideszi értelemben is tartalmazza az alapkört. Közben a metrikus viszonyok nem változnak. Az *1. ábrán* látható ABC normál ideális háromszög társháromszöge az $A'B'C'$ valós háromszög. Az A csúcspontnak az a' oldal, ill. az a oldalnak az A' csúcspont felel meg.



1. ábra

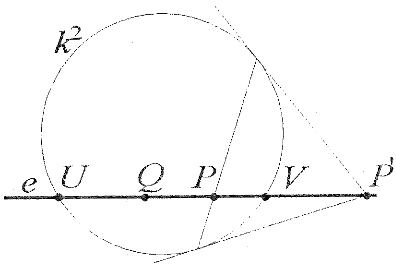
Továbbiakban ideális háromszögön normál ideális háromszöget értünk, és a jelölés az 1. ábrának megfelelő.

Ideális cikluson értjük az olyan ideális pontok halmazát, melyeknek megfelelő valós egyenesek (polárisok) egy valós ciklust burkolnak, e valós ciklust az ideális ciklus *társciklus*ának nevezzük.

Legyen adott az e valós egyenes és rajta a P és Q valós pontok, továbbá két, az M valós pontra illeszkedő k és l egyenes. Ha az U, ill. a V pontok az e végtelen távoli pontjai, az i_1 és az i_2 egyenesek az M pontból a k^2 körhöz húzott képzetes érintők, akkor a P és Q pontok d_{PQ} távolságát a $d_{PQ}=\frac{1}{2}\,|\,ln(PQUV)\,|$, ill. a k és l egyenesek $kl\sphericalangle$ szögét a $kl\sphericalangle=\left|\,\frac{i}{2}ln(kli_1i_2)\right|$ kifejezéssel definiáljuk (ahol i a képzetes egység) (SZÁSZ, 1973). E távolság-, ill. szögdefiníciót általánosítjuk végtelen távoli és ideális pontokra, ill. izotrop és ideális egyenesekre.

2.1.1. Segédtétel. *Az* ***e*** *egyenes messe a k^2 kört az U és a V pontokban (U és V képzetes pontok is lehetnek). Legyen P és Q az e egyenes két, az U és V pontoktól különböző pontja (2. ábra). Továbbá a P'pont a P pont e egyenesre illeszkedő konjugáltja. Ekkor*

$$(PQUV) = -(P'QUV).$$



2. ábra

Bizonyítás. Mivel P és P' konjugáltak a k^2 körre, ezért $(P'PUV) = -1$. Ekkor felhasználva a kettősviszony tulajdonságait adódik, hogy

$$(PQUV) = (VUQP) = -(VUQP)\,(VUPP') = -(VUQP') = -(P'QUV).\ \square$$

2.1.2. Segédtétel. *Ha egy e egyenes a k^2 kört az U és a V pontokban (melyek képzetesek is lehetnek) metszi, P és Q az e egyenes U és V pontoktól különböző pontja, továbbá P és Q pontok e egyenesre illeszkedő konjugáltjai P', illetve Q', akkor*

$$(PQUV)=(P'Q'UV).$$

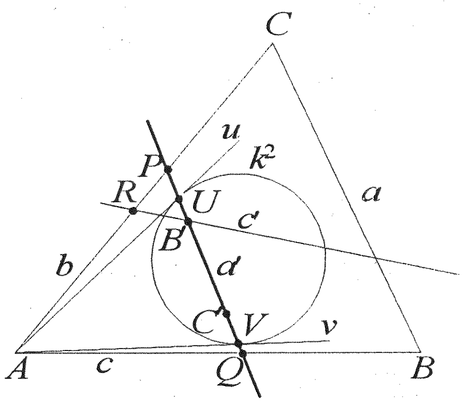
Bizonyítás. A 2.1.1. segédtételt kétszer alkalmazva kapjuk:

$$(PQUV) = -(P'QUV) = (P'Q'UV).\ \square$$

2.1.3. Tétel. Legyen az ABC ideális háromszög A csúcsából a k^2 körhöz húzott két érintő u és v. Az a' messe az alapkört az U és V pontokban (3. ábra). Továbbá az AC oldal egyenese messe az alapkört az E_1, ill. az E_2 (képzetes) pontokban, valamint a B' pontból húzott, az alapkört érintő (képzetes) egyenesek legyenek i_1, ill. i_2.
Ekkor:

i.) $(bcuv) = (B'C'UV)$

ii.) $(ACE_1E_2) = (a'c'i_1i_2)$.



3. ábra

Bizonyítás.
i.) Az *A* pontra illeszkedő sugársor kettősviszonya egyenlő az őt metsző, hozzá perspektív pontsor kettősviszonyával, tehát $(bcuv)=(PQUV)$.
Továbbá a 2.1.2. segédtételt alkalmazva $(PQUV)=(B'C'UV)$, így $(bcuv)=(B'C'UV)$.

ii.) A 2.1.2 segédtétel értelmében $(ACE_1E_2) = (PRE_1E_2)$. Továbbá a *b* pontsor kettősviszonya egyenlő az őt metsző, hozzá perspektív *B'* sugársor kettősviszonyával, azaz $(PRE_1E_2) = (a'c'i_1i_2)$, azaz teljesül *ii.* □

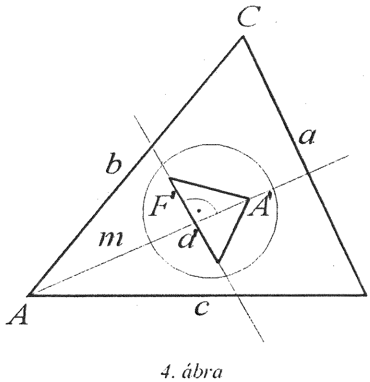
A 2.1.3. tételből következik, hogy a fenti távolság-, ill. szögdefiníciónak nem mondunk ellent a következő definícióval.

2.1.4. Definíció. *Egy ABC ideális háromszög AB oldalhosszán az A'B'C' társháromszög C' csúcsánál lévő szög mértékét, az A csúcsánál lévő szög mértékén a B'C' oldalhosszat értjük.*

Belátható, hogy két egyenes akkor és csak akkor merőleges, ha illeszkednek egymás pólusaira.

2.2. Magasságvonal

2.2.1. Tétel. *Egy ABC ideális háromszög A csúcsából a szemközti a oldalára bocsátott merőlegese legyen m. Ekkor m illeszkedik A'-re, és merőleges a'-re, azaz m az A'B'C' háromszög a' oldalához tartozó magasságvonal (4. ábra).*



4. ábra

Bizonyítás. Az m egyenes merőleges a-ra, azaz illeszkedik az a pólusára, A'-re. Valamint m illeszkedik A-ra, ezért merőleges az A polárisára, a'-re. Tehát az e egyenes az $A'B'C'$ társháromszög egy magasságvonala. □

Következmény. *A valós háromszögek tulajdonságából* (SZÁSZ, 1973, 157. old.) *következik, hogy az ideális háromszögnek létezik magasságpontja, amely megegyezik a társháromszögének a magasságpontjával, amely lehet valós, végtelen távoli, vagy ideális pont.*

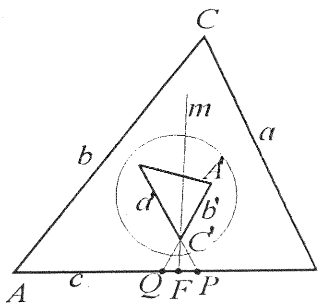
2.3. *Oldalfelező merőleges*

2.3.1. Segédtétel. *Legyen P, P', Q, Q', U, V és e a 2.1.2. tétel feltételeinek megfelelő pont, ill. egyenes. Ekkor az F pont akkor és csak akkor felezi a PQ szakaszt, ha felezi a $P'Q'$ szakaszt is.*

Bizonyítás. Az F pont akkor és csak akkor felezi a PQ szakaszt, ha $(PFUV)=(FQUV)$. A 2.1.1. segédtételből tudjuk, hogy $(PFUV)=-(P'FUV)$, valamint $(FQUV)=-(FQ'UV)$. Az egyenlőségek bal oldalai akkor és csak akkor egyenlők, ha a jobb oldalak megegyeznek, ami azt jelenti, hogy az F pont a $P'Q'$ szakasz felezéspontja is. □

2.3.2. Tétel. *Egy ABC ideális háromszög c oldalának felezőpontja legyen F ($d_{AF}=d_{BF}$). Állítsunk a c oldalra az F pontjában egy m merőlegest. Ekkor az m az ABC ideális háromszög társháromszögének a C' csúcsbeli belső szögfelezője* (*5. ábra*).

Bizonyítás. Mivel m merőleges c-re, ezért illeszkedik a pólusára, C'-re. Továbbá legyen az A és B pont c egyenesre illeszkedő konjugáltja P, ill. Q. A c egyenes metszete az alapkörrel legyen E_1 és E_2. Az F akkor és csak akkor felezi AB-t, ha $(AFE_1E_2)=(FBE_1E_2)$, a 2.3.1. segédtétel miatt $(PFE_1E_2) = (FQE_1E_2)$. Ekkor a C' tartójú sugársorral messük el a c pontsort (E_1, ill. E_2 pontokhoz tartozó sugarak legyenek e_1, ill. e_2). Ekkor, mivel a megfelelő kettősviszonyok megegyeznek $(a'me_1e_2)=(mb'e_1e_2)$, a megfelelő szögek is megegyeznek ($a'm\sphericalangle=mb'\sphericalangle$). Mivel F belső pontja az AB szakasznak, így m belső szögfelező. □



5. ábra

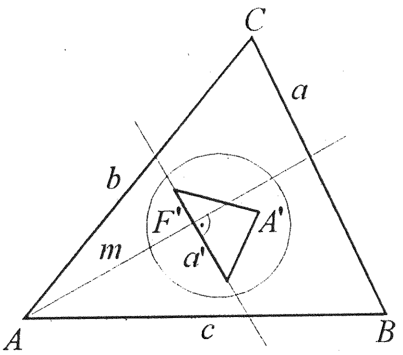
Következmény. *Az ideális háromszög oldalfelező merőlegesei egy valós pontban metszik egymást, amely pont a társháromszög belső szögfelezőinek* (SZÁSZ, 1973) *metszéspontja.*

2.4. *Szögfelező egyenes*

2.4.1. Tétel. *Az ABC ideális háromszög társháromszögének az egyik oldalfelező merőlegese legyen m. Ekkor m felezi az oldalhoz tartozó ideális háromszög csúcsánál levő szöget (6. ábra).*

A 2.4.1. tétel a kettősviszonyok segítségével, a 2.3.2. tételhez hasonlóan bizonyítható.

Következmény. *Egy ideális háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást.*



6. ábra

2.5. *Súlyvonal*

2.5.1. Segédtétel. *Egy ideális háromszög egyik oldalfelező pontjának a polárisa megegyezik a társháromszög megfelelő csúcsánál levő külső szögfelezővel.*

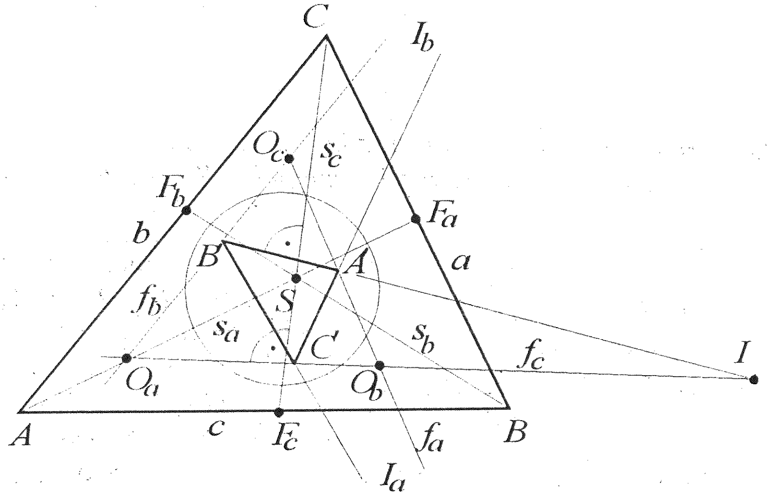
Bizonyítás. Legyen az ABC ideális háromszög c oldalának a felezőpontja F_C, polárisa f_C. Mivel F_C illeszkedik c-re, ezért f_C illeszkedik C'-re. Legyen e_1, ill. e_2 a C'-ből az alapkörhöz húzott két érintő. Ekkor a', b', f_C, e_1, e_2 egy sugársorhoz tartozó különböző egyenesek. Mivel F felezi az AB szakaszt, ezért $(AF_CE_1E_2)=(F_CBE_1E_2)$. Minden pontnak vegyük a polárisát, ekkor $(a'f_Ce_1e_2)=(f_Cb'e_1e_2)$. Ebből kapjuk, hogy az f_C egyenes C'-beli szögfelező, de nem belső szögfelező, mert nem illeszkedik F_C-re. □

2.5.2. Definíció. *Egy ABC ideális háromszög súlyvonalain értjük a csúcspontokat a szemközti szakasz felezőpontjaival összekötő egyeneseket.*

A súlyvonalak lehetnek valósak, izotropok vagy ideálisak. A *7. ábrán* az ABC ideális háromszög súlyvonalai valósak. Ekkor merőlegesek (valós értelemben) az $A'B'C'$ társháromszögbeli megfelelő oldalra és a szemközti külső szögfelezőre. Az izotrop és ideális egyenesekre általánosított szögdefiníció miatt, ha a súlyvonal nem valós, akkor is merőleges a társháromszög megfelelő oldalegyenesére és a szemközti külső szögfelezőre.

2.5.3. Tétel. *A súlyvonalak egy pontban metszik egymást.*

Bizonyítás. Legyen az A', B', ill. C' csúcsokhoz tartozó külső szögfelező f_a, f_b, ill. f_c (7. ábra). Legyenek O_a, O_b, ill. O_c a külső szögfelező egyenesek metszéspontjai. (Ezek a pontok lehetnek valósak, végtelen távoliak, vagy ideálisak.) Az O_a, O_b, ill. O_c pontokra illeszkednek az $A'B'C'$ háromszög megfelelő belső szögfelező egyenesei, és egy O pontban (az $A'B'C'$ háromszög beírható körének a középpontja) metszik egymást. Tehát az $O_aO_bO_c$, ill. az $A'B'C'$ háromszög az O pontra nézve perspektív, ekkor a két háromszög egy s egyenesre nézve is perspektív. Legyenek az s_a, s_b, ill. s_c súlyvonalak pólusai I_a, I_b, ill. I_c. Az s_c egyenes illeszkedik a C, ill. F_c (a c oldal felezőpontja) pontokra, ezért s_c pólusa illeszkedik C, ill. F_c polárisaira, azaz I_c a c', ill. e az f_c egyenesek metszéspontja, amely illeszkedik az s egyenesre. Hasonló okok miatt az I_a és az I_b pontok is illeszkednek s-re. Ezért e három pont (I_c, I_a és I_b) polárisai - az ideális háromszög súlyvonalai - egy S pontban metszik egymást. □



7. ábra

2.6. Szögek és oldalak közötti összefüggések

2.6.1. Tétel. *Egy ABC ideális háromszög esetén:*

a.) Az oldalhosszak összege π-nél kisebb.

b.) Bármely szög tetszőlegesen nagy pozitív értéket vehet fel.

c.) Bármely két szögének az összege nagyobb a harmadiknál.

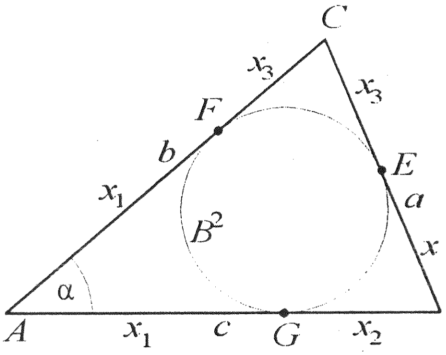
d.) Rögzítsük a c oldalt. Ha a C pont úgy mozog az a oldalon, hogy a b oldal euklideszi értelemben közeledik az alapkör középpontjához, akkor a b oldal hossza csökken, ellenkező esetben növekszik, és az A-nál levő szög növekszik, ellenkező esetben csökken.

e.) Ha az ABC ideális háromszög tartalmazza a DEF ideális háromszöget, akkor az ABC ideális háromszög szögeinek az összege kisebb, mint a DEF ideális háromszög szögeinek az összege, és az ABC ideális háromszög kerülete nagyobb, mint a DEF ideális háromszög kerülete.

A 2.6.1. tétel az ideális háromszög és társháromszöge közötti kapcsolat alapján egyszerűen bizonyítható.

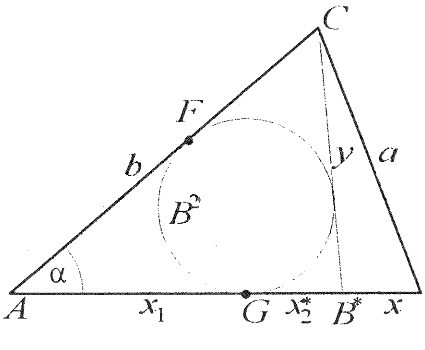
2.6.2. Tétel. *Legyen az ABC háromszög egy valós háromszög. Legyen a beírható köre B^2. Rögzítsük a háromszög A csúcsát, a hozzá tartozó α szöget és B^2-t. Ekkor az ABC háromszögnek akkor és csak akkor beírható köre a B^2, ha $b+c-a=h_a$ állandó. Nevezzük ezt az állandót a háromszög a oldalához tartozó oldalhiánynak.*

Bizonyítás. Az a, b és c oldalak a beírható kört érintik (8. ábra). Legyenek ezek az érintési pontok rendre E, F és G. Ezek a pontok az oldalakat két-két szakaszra osztják. Vegyük figyelembe, hogy egy külső pontból egy ciklushoz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. Ekkor $a=x_2+x_3$; $b=x_3+x_1$; $c=x_1+x_2$. Azaz $b+c-a= =x_3+x_1+x_1+x_2-(x_2+x_3)=2x_1=h_a$. Mivel A és α rögzített, ezért minden olyan ABC háromszögnek, melynek a beírható köre B^2, az a oldal oldalhiánya (h_a) állandó.



8. ábra

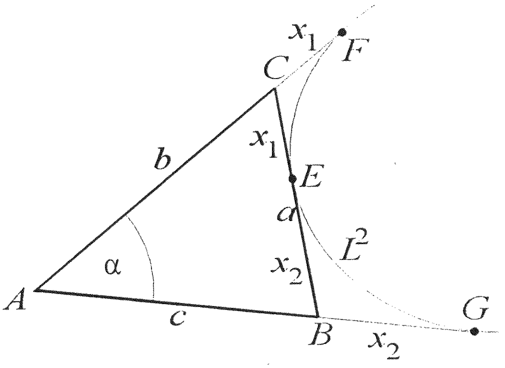
Ezek után ellenőrizzük az állítás megfordítását. Tegyük fel, hogy az ABC háromszögre teljesül, hogy $b+c-a=h_a$ (9. ábra). Legyen az AB^*C háromszög olyan, melynek a beírható köre B^2. Legyen e háromszög A-val szemközti oldala y, $GB^*=x_2^*$, $B^*B=x$. Ekkor $b+x_1+x_2^*-y=h_a$. Továbbá, (a feltétel miatt), ha a nem metszi B^2-t, $b+x_1+x_2^*+x-a=h_a$ (ha a metszi B^2-t, akkor $b+x_1+x_2^*-x-a=h_a$). Ebből $y+x=a$ (ill. $y-x=a$), amiből $x=0$, azaz az állítás ($B=B^*$) adódik. □



9. ábra

2.6.3. Tétel. *Legyen az ABC háromszög egy valós háromszög. Rögzítsük a háromszög A csúcsát és a hozzá tartozó α szöget. Legyen a háromszög a oldalához tartozó, hozzá írható ciklusa L^2. Ekkor az a oldal akkor és csak akkor érinti az L^2 ciklust, ha $a+b+c$ állandó.*

Bizonyítás. Az a, b és c oldalegyenesek a hozzáírható ciklust érintik (*10. ábra*). Legyenek ezek az érintési pontok rendre E, F és G. Vegyük figyelembe, hogy egy külső pontból egy ciklushoz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. Ekkor $a=x_1+x_2$, az AF szakasz $b+x_1$, az AG szakasz $c+x_2$. Ekkor $a+b+c= =b+c+x_1+x_2=AF+AG$. Mivel A és α rögzített, ezért minden olyan ABC háromszögben, melynek az a oldalhoz írható ciklusa L^2, az oldalak összege állandó.



10. ábra

A tétel megfordításának bizonyítása a 2.6.2. tétel bizonyításához hasonló. □

2.6.4. Tétel. *Legyen adott egy ABC háromszög. Legyen h_a, h_b, ill. h_c az a, b, ill. c oldalak oldalhiánya. Ekkor $a \geq max(b,c)$ akkor és csak akkor, ha $h_a \leq min(h_b,h_c)$.*

Bizonyítás. Az ABC háromszög oldalait a beírható kör az érintési pontokkal két szakaszra osztja. Legyen $a = x_2+x_3$, $b = x_3+x_1$, $c = x_1+x_2$ (8. ábra).

$$a \geq max(b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b \\ a \geq c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \geq x_1 \\ x_3 \geq x_1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \leq min(x_2,x_3) \Leftrightarrow h_a \leq min(h_b,h_c).$$

□

Megjegyzés. A 2.6.2, 2.6.3. és a 2.6.4. tételek euklideszi geometriában is igazak.

2.6.5. Tétel. *Legyen adott az ABC ideális háromszög.*
i.) Legyen az ABC ideális háromszög beírható ciklusa B^2. Rögzítsük a háromszög A csúcsát és α szögét. Az a oldal akkor és csak akkor érinti a B^2-t, ha $b+c-a=h_a$ állandó, ahol h_a az a oldal oldalhiánya.
ii.) Legyen az ABC ideális háromszög köré írható ciklusa K^2. Rögzítsük a háromszög c oldalát. Ekkor az ABC ideális háromszög C csúcsa akkor és

csak akkor illeszkedik K^2-re, ha $\alpha+\beta-\gamma= e_\gamma$ állandó, ahol e_γ a γ szög szöghiánya.

*iii.) Rögzítsük a háromszög A csúcsát és α szögét. Legyen T^2 az az ideális ciklus, melynek a $T^2{}'$ társciklusa az a valós ciklus, amely az A'B'C' társháromszög C' csúcsához tartozó egyenszögösszegű ciklusa (rögzített c' oldal esetén, C' illeszkedik $T^2{}'$-re akkor és csak akkor, ha az A'B'C' háromszög szögösszege állandó) (*BUI VAN DUNG (1985b)). *Ha az ideális háromszög a oldala úgy mozog, hogy ABC háromszög ideális háromszög, akkor az a oldal akkor és csak akkor érinti a T^2-t, ha $a+b+c$ állandó.*

iv.) Legyen adott az ABC ideális háromszög. Rögzítsük a háromszög a oldalát. Legyen L^2 az az ideális ciklus, melynek az $L^2{}'$ társciklusa az a valós ciklus, amely az A'B'C' társháromszög a' oldalához tartozó hozzáírható ciklusa. Ha az ideális háromszög A csúcsa úgy mozog, hogy az ABC háromszög ideális háromszög, akkor az A csúcs akkor és csak akkor illeszkedik L^2-re, ha $\alpha+\beta+\gamma$ állandó.

Bizonyítás.
i.) Az *ABC* ideális háromszög oldalainak hossza megfelel az ideális háromszög társháromszögének szögeinek, a beírható ciklusa a társháromszög köréírható ciklusának, amely legyen $B^2{}'$. A rögzített *A* csúcsnak, ill. α szögnek megfelel az *a'* oldal. Az *A'B'C'* háromszög szögei legyenek rendre α', β', γ'. Az *A'B'C'* háromszög valós, ezért igaz rá, hogy $\beta'+\gamma'-\alpha'=h_a$ akkor és csak akkor, ha *A'* illeszkedik $B^2{}'$-re (h_a egyben az α' szög szöghiánya is) (*BUI VAN DUNG* (1985b)). Az utóbbi arra az esetre is igaz, ha az *A'B'C'* háromszög tartalmazza az alapkör középpontját, azaz ha az *ABC* háromszög ideális. Ez pedig a tételt igazolja.
ii.-iv.) A 2.6.2 és a 2.6.3. tétel valamint *BUI VAN DUNG* (1985b) alapján az *i.*-hez hasonlóan bizonyítható. □

Megjegyzés. Egy ideális háromszög egyik oldalának az oldalhiánya megegyezik a társháromszög megfelelő szögének a szöghiányával. Egy ideális háromszög egyik szögének a szöghiánya megegyezik a társháromszög megfelelő oldalának az oldalhiányával.

2.6.6. Tétel. *Legyen adott az ABC ideális háromszög.*
i.) Legyen h_a, h_b, ill. h_c az a, b, ill. c oldalak oldalhiánya. Ekkor

$$a \geq max(b,c) \Leftrightarrow h_a \leq min(h_b,h_c).$$

ii.) Legyen e_α, e_β, ill. e_γ az α, β, ill. γ szögekhez tartozó szöghiány. Ekkor

$$\alpha \geq max(\beta,\gamma) \Leftrightarrow e_\alpha \leq min(e_\beta, e_\gamma).$$

A 2.6.6. tétel bizonyítása az ideális háromszög és társháromszöge közötti kapcsolat alapján egyszerűen bizonyítható.

3. Ideális tetraéderek

3.1. Tekintsük a $\overline{\mathbb{H}}^3$ teret, azaz a végtelen távoli és ideális pontokkal bővített hiperbolikus teret. A szemléletesség kedvéért a 2. fejezethez hasonlóan mindent a C-K modellben szemléltetünk és bizonyítunk. 1.2.-ben találjuk a lehetséges tetraéder típusait azon feltétel mellett, hogy a csúcsok, oldalegyenesek és az oldallapok síkjai azonos típushoz tartoznak.

A projektív teret 4 nem egy ponton átmenő sík 8 részre osztja, azaz kapunk 8 tetraédert. Az ideális lapsíkú tetraéderek közül azt, amely euklideszi értelemben tartalmazza a C-K modellt, *normál ideális tetraéder*nek nevezzük. A síkhoz hasonlóan bizonyítható, hogy létezik olyan egybevágósági transzformáció (C-K modellben a gömböt önmagára leképező kollineáció), amely a normál ideális tetraédert olyan tetraéderbe viszi át, amely euklideszi értelemben is tartalmazza a C-K modell alapgömbjét. A továbbiakban ideális tetraéderen normál ideális tetraédert értünk.

Ha tekintjük a C-K modell alapgömbjére vonatkozó polaritást, akkor az 1.2.1., az 1.2.2., az 1.2.3. és az 1.2.4. típusú tetraéderek polár megfelelői az 1.2.7., 1.2.6., 1.2.5., 1.2.4. típusú tetraéderek lesznek. Egy tetraédert és polár megfelelőjét *társtetraéder*eknek nevezzük (13–16. ábra).

3.2. Egy tetraédert egyenlő oldalúnak nevezünk, ha lapjai egybevágók. Az 1.2.1. és 1.2.3. típusú egyenlő oldalú tetraéderekre nyilván teljesül, hogy lapjai egyenlő területűek, szögletei egybevágók, a lapháromszögek köré írt körei egyenlő sugarúak, a tetraéder beírt gömbjének, köré írt gömbjének középpontja és súlypontja egybeesik. Az 1.2.3. típusú tetraéderek esetén ezeket külön értelmezte *Bui Van Dung* (1984). Ugyancsak értelmezzük a lapok területét. Két lapot egyenlő területűnek mondtunk, ha a szögek összege (oldalak távolságának összege) egyenlő. *Horváth J.* (1969) és *Bui Van Dung* (1984, 1985a) bizonyították, hogy ezek az állítások megfordíthatók. Pl. Ha egy 1.2.1. és 1.2.3. típusú tetraéderben a súlypont, a beírt és a körül írt gömb középpontja közül kettő egybeesik, akkor a lapok egybevágók. Tekintettel a későbbiekre és arra, hogy $\overline{\mathbb{H}}^3$-ban dolgozunk, a korábbiakhoz képest a megfordításokat egy kicsit átfogalmazzuk. Éspedig az 1.2.1. és 1.2.3. típusú tetraéderekre igazak az alábbi állítások.

3.2.1. Tétel.

i.) Ha egy tetraéderben a lapháromszögek szögeinek összege egyenlő, akkor az egyenlő oldalú.

ii.) Ha egy tetraéderben a lapok oldalainak összege (kerülete) egyenlő, akkor a tetraéder egyenlő oldalú.

iii.) Ha egy tetraéderben minden csúcsnál a lapok szögeinek összege egyenlő, akkor a tetraéder egyenlő oldalú.

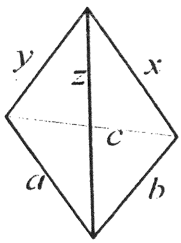
iv.) Ha egy tetraéderben minden csúcsnál az élek által bezárt szögek összege (szöglet kerülete) egyenlő, akkor a tetraéder egyenlő oldalú.

v.) Egyenlő oldalú tetraéderekben a szemközti élek normáltranszverzálisai felezik az éleket és páronként felezik egymást.

A további tulajdonságokat itt nem soroljuk fel, mert 1.2.2., 1.2.4., 1.2.5. és 1.2.6 típusú tetraéderekre most nem értelmezzük a beírt és köré írt gömb középpontját, továbbá a súlypontját. Megjegyezzük, hogy értelmezhetők, de tekintettel a dolgozat terjedelmére, ettől most eltekintünk.

Korábbi dolgozatokban a 3.2.1.*ii.* és *iv.* állítások nem szerepeltek. Nézzük ezek bizonyítását.

3.2.1. ii. bizonyítása. Jelölés a 11. ábra szerint. A lapháromszögek egyenlő kerületűségéből következik, hogy



11. ábra

$$\begin{aligned} x+y &= a+b \\ x+z &= a+c \\ y+z &= b+c. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Ezek összegének feléből rendre kivonva az 1., 2. és 3. egyenlőséget

$$z=c,\ y=b,\ x=a \qquad (3.2)$$

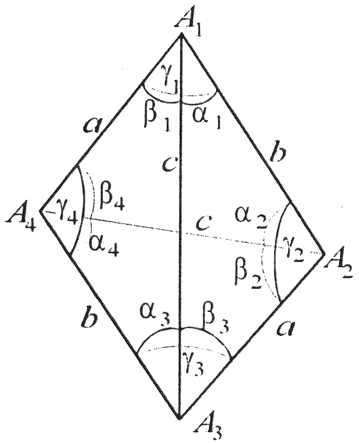
adódik, azaz a lapok egybevágók.

Megjegyezzük, hogy az 1.2.3. típusú tetraéderekre a bizonyítás ugyanígy történik. Oldalak hosszán a szögegyenesek távolságát értjük, ahol a szögegyenes két oldal közös merőlegese. □

3.2.1. *iv.* bizonyítása az 1.2.1. típusú tetraéder esetre. Ismert, hogy a gömbháromszögben (a szokásos jelöléseket használva)

$$tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{sin(s-a)\cdot sin(s-b)}{sin\, s\cdot sin(s-c)}}\,, \qquad (3.3)$$

ahol $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ a félkerület. Jelöljük a tetraéder csúcsait A_1, A_2, A_3, A_4-gyel, az élszögeit rendre α_i, β_i, γ_i-vel, ahol i=1,2,3,4. Jelölés a *12. ábra* szerint.



12. ábra

A csúcsoknál található gömbháromszögek szögei a tetraéder lapszögei, ezért minden élnél a megfelelő gömbháromszögek szögei egyenlők. Így (3.3) alapján felírható az alábbi 6 egyenlőség.

$$\begin{aligned}
\frac{sin(s-\alpha_1)\cdot sin(s-\gamma_1)}{sin(s-\beta_1)} &= \frac{sin(s-\alpha_2)\cdot sin(s-\gamma_2)}{sin(s-\beta_2)}\\
\frac{sin(s-\alpha_3)\cdot sin(s-\gamma_3)}{sin(s-\beta_3)} &= \frac{sin(s-\alpha_4)\cdot sin(s-\gamma_4)}{sin(s-\beta_4)}\\
\frac{sin(s-\gamma_2)\cdot sin(s-\beta_2)}{sin(s-\alpha_2)} &= \frac{sin(s-\gamma_3)\cdot sin(s-\beta_3)}{sin(s-\alpha_3)}\\
\frac{sin(s-\gamma_4)\cdot sin(s-\beta_4)}{sin(s-\alpha_4)} &= \frac{sin(s-\gamma_1)\cdot sin(s-\beta_1)}{sin(s-\alpha_1)}\\
\frac{sin(s-\alpha_1)\cdot sin(s-\beta_1)}{sin(s-\gamma_1)} &= \frac{sin(s-\alpha_3)\cdot sin(s-\beta_3)}{sin(s-\gamma_3)}\\
\frac{sin(s-\alpha_2)\cdot sin(s-\beta_2)}{sin(s-\gamma_2)} &= \frac{sin(s-\alpha_4)\cdot sin(s-\beta_4)}{sin(s-\gamma_4)}
\end{aligned} \qquad (3.4)$$

(3.4)-ből az első négy egyenletet összeszorozzuk, majd a szükséges egyszerűsítéseket elvégezzük, és négyzetgyököt vonunk. Kapjuk a

$$sin(s-\alpha_1)\, sin(s-\alpha_3)\, sin(s-\beta_4)\, sin(s-\beta_2) = sin(s-\alpha_2)\, sin(s-\alpha_4)\, sin(s-\beta_1)\, sin(s-\beta_3)$$

egyenlőséget.

Hasonlóan adódik a

$$sin(s-\alpha_1)\, sin(s-\alpha_4)\, sin(s-\beta_3)\, sin(s-\beta_2) = sin(s-\alpha_2)\, sin(s-\alpha_3)\, sin(s-\beta_1)\, sin(s-\beta_4)$$

egyenlőség. Az utóbbi két egyenlőséget összeszorozzuk, majd egyszerűsítünk és négyzetgyököt vonunk. Kapjuk, hogy

$$sin(s-\alpha_1)\, sin(s-\beta_2) = sin(s-\alpha_2)\, sin(s-\beta_1). \qquad (3.5)$$

(3.4) első egyenletéből

$$sin(s-\alpha_1)\, sin(s-\gamma_1)\, sin(s-\beta_2) = sin(s-\alpha_2)\, sin(s-\gamma_2)\, sin(s-\beta_1)$$

adódik. Felhasználva (3.5)-öt kapjuk, hogy

$$sin(s-\gamma_1) = sin(s-\gamma_2). \qquad (3.6)$$

Hiperbolikus és euklideszi geometriában a tetraéder 4 lapjára felírva a szögek összegét és felhasználva, hogy a szögek összege nem nagyobb π-nél, adódik, hogy $s \leq \frac{\pi}{2}$.

Így (3.6)-ból kapjuk, hogy

$$\gamma_1 = \gamma_2. \qquad (3.7)$$

Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$\alpha_i = \alpha_k,\ \beta_i = \beta_k,\ \gamma_i = \gamma_k, \qquad (3.8)$$

ahol $i,k = 1,2,3,4$. Ebből már következik, hogy a tetraéder lapjai egybevágók.

Az 1.2.3. típusú tetraéderek szögletén az egy csúcsból kiinduló élekre merőleges sík által a tetraéderből kimetszett háromszöget értjük. Feltesszük, hogy minden szögletben a háromszög kerülete $2s$. Ismert a (3.3)-nak megfelelő formula, azaz

$$tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{sh(s-a)\cdot sh(s-b)}{sh\, s\cdot sh(s-c)}}\ . \qquad (3.9)$$

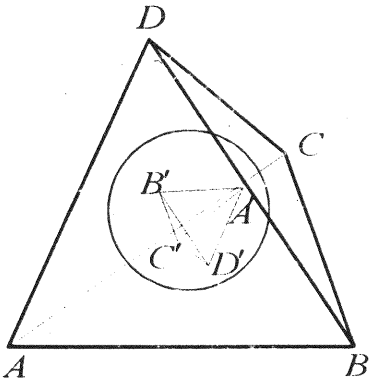
Ezen formula alapján felírhatunk a (3.4.)-nek megfelelő egyenlőségeket. Ezekből a fentivel azonos módon megkapjuk, hogy

$$sh(s-c_1) = sh(s-c_2),$$

azaz $c_1 = c_2$. Így megkaptuk a (3.8)-nak megfelelő egyenlőségeket, azaz a lapok egybevágók. □

3.3. Az ideális (1.2.7. típusú) tetraéder egyenlő oldalú, ha lapjai egybevágók, azaz létezik egybevágósági transzformáció (a C-K modellben az alapgömböt önmagára leképező kollineáció), amely bármely kiválasztott két lapot egymásra képez le.

Adott az $ABCD$ ideális tetraéder (*13. ábra*). Legyen ennek társtetraédere az $A'B'C'D'$ tetraéder. A C-K modellben pl. a D csúcs polársíkja a C-K modell alapgömbjére nézve az $A'B'C'$ lap síkja és a BCD lap pólusa az A' csúcs. Nyilván az $A'B'C'D'$ tetraéder valós (1.2.1. típusú). Nézzük a további megfeleltetést. A D szögletnek megfelel az $A'B'C'$ lap. Az ADB, BDC, CDA szögeknek megfelelnek rendre az $A'C'B'$, $B'A'C'$, $C'B'A'$ szögek, az AD, BD, CD-hez tartozó lapszögeknek pedig a $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ oldalak. A BCD lap szögeinek megfelelnek az A'-höz tartozó szöglet élszögei, oldalainak pedig az A' szöglet lapszögei.



13. ábra

Ha két alakzat (α és β) egybevágó, akkor polár megfelelőik (α' és β') is egybevágók. Ugyanis az α' egy korrelációval α-ba vihető, majd ez egy kollineációval β-ba, végül egy korrelációval β'-be, és mindegyik transzformáció a C-K alapgömbjét önmagára képezi le. A három transzformáció szorzata egy kollineáció, amely a C-K alapgömbjét szintén önmagára képezi le.

Az előző bekezdésben leírt megfeleltetés alapján a BCD lap területe (szögek összegével kifejezve) az A' szöglet kerülete, a BCD lap kerülete az A' szöglet lapszögeinek összege, a D szöglet kerülete (élszögeinek összege) az $A'B'C'$ háromszög szögeinek összege, és a D szöglet lapszögeinek összege az $A'B'C'$ háromszög kerülete.

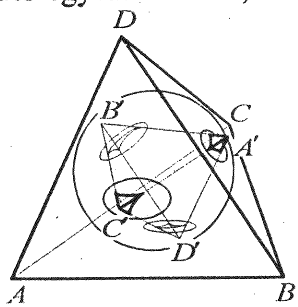
Megjegyezzük, hogy az egyes szögek, szakaszok kettősviszonnyal is értelmezhetők, és akkor a 2. fejezethez hasonlóan bizonyítható az egyes értékek egyenlősége.

Az elmondottakból következik, hogy igazak a 3.2.1. tételben leírt állítások. Felhasználtuk HORVÁTH J. (1969) eredményeit és a most bebizonyított 3.2.1.*ii*. és *iv*. állításokat.

3.4. A valós lapsíkú, ideális élű (1.2.5. típusú) tetraéder egyenlő oldalú, ha lapjai egybevágók. Ennek társtetraédere az ideális csúcsú, valós élű (1.2.3. típusú) tetraéder (*14. ábra*).

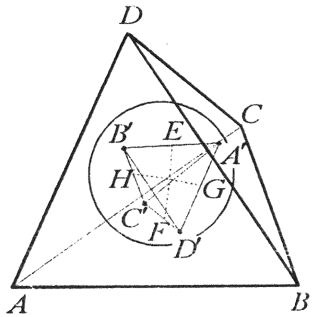
A D szöglet élszögeinek az $A'B'C'$ szögei (oldalak távolságai), lapszögeinek az $A'B'C'$ oldalai (szögegyeneseinek távolsága), BCD lap szögeinek az A' szöglet élszögei, és végül a BCD lap oldalainak az A' szöglet lapszögei felelnek meg.

Így felhasználva *Bui Van Dung* (1984a) eredményeit és az itt bebizonyított 3.2.1.*ii* és *iv*. állításokat *az 1.2.5. típusú tetraéderekre is igaz a 3.2.1. tétel állítása.*



14. ábra

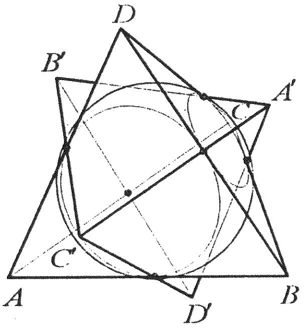
3.5. Az aszimptotikus (1.2.2. típusú) tetraéder szükségképpen egyenlő oldalú, hiszen lapjai egybevágó szabályos háromszögek. Így ezek társtetraéderét, az izotrop lapsíkú (1.2.6. típusú) tetraédert nevezhetjük egybevágó szögletűnek (*15. ábra*).



15. ábra

Bár a tetraéder lapjai egybevágók, az aszimptotikus tetraéderek általában nem egybevágók.

Megmutatjuk, hogy az aszimptotikus tetraéder négy szöglete egybevágó.
Tekintsük a két szemközti él (pl. $A'B'$ és $C'D'$) normáltranszverzálisát, amely az éleket E és F pontban metszi. Tükrözzük az $A'B'C'D'$ tetraédert az EF egyenesre. Mivel A', B', C', D' végtelen távoli pontok, tükrözésnél A' átmegy B'-be, és C' pedig D'-be. Így az A' szöglet egybevágó a B' szöglettel, a C' szöglet pedig a D' szöglettel. Vegyük az $A'D'$ és $C'B'$ élek normáltranszverzálisát. Legyen ez a GH egyenes ($G \in A'D'$, $H \in B'C'$). A HG egyenesre is szimmetrikus a tetraéder, így A' és B' szöglet egybevágó a D' ill. C' szöglettel. Mivel két kitérő egyenesnek egyértelműen létezik a normáltranszverzálisa és az $A'B'$ él tükörképe a $C'D'$ él, így EF tükörképe önmaga. Ebből következik, hogy HG metszi EF-et és felezi azt. A tükrözést a harmadik élpár



16. ábra

normáltranszverzálisára megismételve kapjuk, hogy az aszimptotikus tetraéder szemközti éleinek normáltranszverzálisai egy ponton mennek át és páronként felezik egymást. Ezt nevezhetjük a tetraéder súlypontjának.

3.6. Az izotrop élű (1.2.4. típusú) tetraéderek lapjai szabályos háromszögek és társtetraédere is izotrop élű tetraéder, így szögletei is egybevágók *(16. ábra)*.

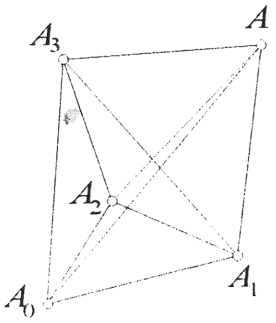
4. Ideális szimplexek $\overline{\mathbb{H}}^d$-ben

4.1. Tekintsük a végtelen távoli és ideális pontokkal kibővített d-dimenziós $\overline{\mathbb{H}}^d$ hiperbolikus teret. Az 1.2. pontnak megfelelően ha osztályoznánk a szimplexeket, akkor a különböző típusú szimplexek d-től függő sorozatát kapnánk.

Legyen $d \geq 4$. *MARTINI* (1993) vette észre, hogy állandó görbületű d-dimenziós terekben (euklideszi, szférikus és (közönséges) hiperbolikus) a következő négy tulajdonság ekvivalens.

*i.) A d-dimenziós **S** szimplex szabályos.*
*ii.) Az **S** szimplex 2-dimenziós lapjai egybevágók.*
*iii.) Az **S** szimplex 2-dimenziós lapjai egyenlő területűek.*
*iv.) Az **S** szimplex bármely 3-dimenziós lapjának szögleteinek mértéke megegyezik.*

A bizonyítás egyszerű, ezért azt megismételjük. Nyilván elég megmutatni, hogy *ii.*-ből következik *i.* Ugyanis HORVÁTH J. (1969) alapján *iii.*-ből és *iv.*-ből is következik *ii.*



17. ábra

Megmutatjuk, hogy $d>4$ esetén már a 4-dimenziós lapok szabályosak, ill. $d=4$ esetén a szimplex szabályos. Legyen a szimplex egy 4-dimenziós lapja, vagy maga a szimplex $A_0A_1A_2A_3A_4$. Az $A_0A_1A_2A_3$ tetraéder egyenlő oldalú, így

$$A_0A_1=A_2A_3=a, \quad A_0A_2=A_1A_3=b, \quad A_0A_3=A_1A_2=c. \quad (4.1)$$

Az $A_0A_1A_2A_4$ tetraéder egyenlő oldalú, így

$$A_0A_1=A_2A_4=a, \quad A_0A_2=A_1A_4=b, \quad A_0A_4=A_1A_2=c. \quad (4.2)$$

Az $A_0A_1A_3A_4$ tetraéder egyenlő oldalú, így

$A_0A_1=A_3A_4=a, \quad A_0A_3=A_1A_4=b, \quad A_0A_4=A_1A_3=c.$ (4.3)

A (4.1), (4.2) és (4.3)-ból következik, hogy $b=c$.

Az $A_0A_2A_3A_4$ tetraéder egyenlő oldalú, így

$$A_0A_2=A_3A_4. \quad (4.4)$$

Tovább nem folytatjuk, mert (4.2), (4.3) és (4.4)-ből következik, hogy $a=b$, azaz

$$a=b=c.$$

A 4-dimenziós szimplex minden 2-dimenziós lapja szabályos, így a szimplex szabályos. □

A hiperbolikus geometriában az *i.–iv.* tulajdonságok pótolhatók valamely ekvivalens tulajdonsággal, illetve kiegészíthetők továbbiakkal.

3.2.1. Tétel. Legyen $d \geq 4$. Tekintsük a $\overline{\mathbb{H}}^d$ térben azokat a szimplexeket, amelyek 3-dimenziós lapjai az 1.2.1., 1.2.3., 1.2.5. *és* 1.2.7. *típusok valamelyikébe tartoznak. Az ilyen szimplexekre az alábbi 6 állítás ekvivalens:*

i.) A d-dimenziós ***S*** *szimplex szabályos.*

ii.) Az ***S*** *szimplex 2-dimenziós lapjai egybevágók.*

iii.) Az* ***S*** *szimplex 2-dimenziós lapjai szögeinek az összege megegyezik.*

iv.) Az* ***S*** *szimplex bármely 3-dimenziós lapjának egy-egy csúcsához tartozó lapszögek összege egyenlő.*

v.) Az ***S*** *szimplex bármely két 2-dimenziós lapjának kerülete egyenlő.*

vi.) Az ***S*** *szimplex bármely 3-dimenziós lapján a szögletek kerülete (élszögek összege) egyenlő.*

Bizonyítás. Mind a négy esetben elég bizonyítani, hogy *ii)* állításból következik *i)*, azaz az ***S*** szimplex szabályos. Ugyanis a további négy bármelyikéből következik az *ii)* állítás. (Lásd *HORVÁTH* (1969) és a 3.2.1. tétel *ii) és iv)* esetének bizonyítása.)

Azon szimplexekre, amelyek 2-dimenziós lapjai 1.2.1. típusúak, *MARTINI* (1993) bebizonyította a tételt. A tétel bizonyítása hasonló arra az esetre, amikor a 2-dimenziós lapok 1.2.3. típusúak. Ezekből pedig a pólus-polaritás felhasználásával már következik a tétel állítása a maradék két esetre is. □

Megjegyezzük, hogy fel lehetne sorolni a tetraéderekre mindazokat a tulajdonságokat, melyekből következik, hogy a tetraéder egyenlő oldalú. Ezeket itt nem tesszük, mert az 1.2.1 és az 1.2.3. típusú tetraédereken kívül nem értelmeztük a lapok köré írt körét, tetraéder súlypontját, beírt-, és köré írt körének középpontját.

4.2. Legyen $d \geq 2$. Tekintsük $\overline{\mathbb{H}}^d$-ben a d-dimenziós aszimptotikus (végtelen távoli csúcspontú) szimplexeket. 3.5. alapján tudjuk, hogy kiválasztva egy 3-dimenziós lapját, azok szögletei is egybevágók. Ebből következik, hogy a szemközti élekhez tartozó lapszögek egyenlők. Ezen észrevételből következik, hogy a d-dimenziós aszimptotikus szimplexek mindig szabályosak. A bizonyítás úgy történik, hogy a (4.1)–(4.4) egyenlőségeket ugyanazon élekhez tartozó lapszögekre írjuk fel. Így megkapjuk, hogy a lapszögek mind egyenlők $\frac{\pi}{3}$-mal. Hasonló állítás igaz az aszimptotikus szimplex társtetraéderére, azaz olyan szimplexre, amelynek minden 2-dimenziós lapja izotrop.

IRODALOM

BOLYAI, J. (1987): Appendix – A tér tudománya (Szerkesztette; bevezetéssel, magyarázattokkal, kiegészítésekkel ellátta: Kárteszi Ferenc), Akadémiai Kiadó, Budapest.

BUI VAN DUNG (1984): Az ideális csúcspontú egyenlő oldalú tetraéderek tulajdonságai hiperbolikus térben, Matematikai Lapok, Budapest, 32. 1-3, 127-135.

BUI VAN DUNG (1985a): A tetraéderek néhány tulajdonsága a hiperbolikus térben, Matematikai Lapok, Budapest, 32. 4, 219-228.

BUI VAN DUNG (1985b): Ideális csúcspontú sokszögek néhány tulajdonsága, Matematikai Lapok, Budapest, 32. 4, 229-237.

FABER, R. L. (1983): Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry, Marcel Dekker, Inc., New York.

HORVÁTH, J. (1969): Az egyenlő oldalú tetraéderek tulajdonságai állandó görbületű terekben, Matematikai Lapok, Budapest, XX. 3-4, 357-364.

HORVÁTH, J. (1982): Szabályos sokszögek néhány extremális tulajdonsága az euklideszi és hiperbolikus síkon, valamint a gömbfelületen, A Matematika Tanítása, Budapest, XXIX. (4), 106-112.

LIEBMANN, H. (1912): Nichteuklidische Geometrie, Berlin und Leipzig.

MARTINI, H. (1993), Regular simplices in spaces of constant curvature, Amer. Math., Monthly, 100, 196-171.

REIMAN, I. (1986): A geometria és határterületei, Gondolat, Budapest.

ROZENFELD, B. A. (1969): Non-Euclidean Spaces, Izdatelstva Nauka, Moszkva (oroszul)

SZÁSZ, P. (1973): Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába, Akadémiai Kiadó, Budapest.

ULTRAIDEAL SIMPLICES IN THE HYPERBOLIC SPACE

1. Let us extend the d-dimensional hyperbolic space $\mathbb{H}^2$ ($d \geq 2$) with its ideal points, the points defined by two parallel lines and with its ultraideal points, the points defined by two divergent lines in the same plane. We denote this space by $\overline{\mathbb{H}}^d$. If we consider the model Cayley-Klein (C-K) in the Euclidean space E^d extended with its ideal points then the points of the base sphere of the model C-K are the ideal points and the outer points are the ultraideal points. The inner points (points of $\mathbb{H}^d$) are called ordinary (real) points. A k-dimensional subspace $\overline{\mathbb{H}}^k$ is called ordinary, isotropic or ultraideal if it has more than one ideal point (it intersects the base sphere of the model), it has exactly one ideal point (it touches the base sphere) or it has no ideal point (it does not intersect the base sphere).

In this article we deal with simplices (triangle, tetrahedron, ...) whose k-dimensional faces are the same type (ordinary, isotropic or ultraideal). Triangles and tetrahedra has the following types:

1.1. Types of triangles:

1.1.1. Ordinary (with ordinary vertices)
1.1.2. Asymptotic (with ideal vertices)
1.1.3. Triangles with ultraideal vertices and ordinary lines of the sides
1.1.4. Triangles with isotropic lines of the sides
1.1.5. Ultraideal (with ultraideal lines of the sides)

1.2. Types of tetrahedra:

1.2.1. Ordinary (with ordinary vertices)
1.2.2. Asymptotic (with ideal vertices)
1.2.3. Tetrahedra with ultraideal vertices and ordinary lines of the edges
1.2.4. Tetrahedra with isotropic lines of the edges
1.2.5. Tetrahedra with ultraideal lines of the edges and ordinary planes of the faces
1.2.6. Tetrahedra with isoptropic planes of the faces
1.2.7. Ultraideal (with ultraideal planes of the faces)

2. *BUI VAN DUNG* (1985b) examined the basic properties of triangles of type 1.1.3. In our article we deal with the basic properties of triangles of type 1.1.5. which contain the base circle of the model. Using the pole-polar transformation we can connect the types of triangles bijectively. For example, triangles of type 1.1.5. are connected to triangles of type 1.1.1. If two triangles are connected to each other then we call them co-triangles.
Some properties of triangles of type 1.1.5.:

i.) It has an orthocentre and that is the same as the orthocentre of its cotriangle.
ii.) There is a common point of intersection of the perpendicular bisectors of its sides and that is the same as the point of intersection of the external bisectors of the angles of its co-triangle.
iii.) There is a common point of intersection of the external bisectors of the angles and that is the same as the point of intersection of the perpendicular bisectors of the sides of its co-triangle.
iv.) It has a centroid.

3. A tetrahedron is called equifaced tetrahedron if its faces are congruent. The following statements are proved for the 1.2.1. (*HORVÁTH*, 1969) and the 1.2.3. (*BUI VAN DUNG*, 1984; 1985a) types of tetrahedra. The proofs of the statements ii.) and iv.) are in our article.
i.) If the sums of the angles on the different faces in a tetrahedron are equal then it is an equifaced tetrahedron.
ii.) If the sums of the sides (perimeter) on the different faces in a tetrahedron are equal then it is an equifaced tetrahedron.
iii.) If the sums of the angles of the faces belonging to the same vertex are equal for each vertex of the tetrahedron then it is an equifaced tetrahedron.
iv.) If the sums of the angles of the edges belonging to the same vertex are equal for each vertex of the tetrahedron then it is an equifaced tetrahedron.
v.) In an equifaced tetrahedron the normal transversal of the opposite edges bisects the edges and all normal transversals of the opposite edges bisect each other too.

In our article we prove the corresponding statements for the tetrahedra of 1.2.2., 1.2.4.-1.2.7. types.
4. We also prove the following theorem:
Let us consider the simplices in the space $\overline{\mathbb{H}}^d$ (($d \geq 24$) whose 3-dimensional faces are terahedron of the same type 1.2.1., 1.2.3., 1.2.5. or 1.2.7. The statements below are equivalent for these simplices.
i.) The d-dimensional simplex S is regular.
ii.) The 2-dimensional faces of the simplex S are congruent.
iii.) The sums of the angles on the 2-dimensional faces of the simplex S are equal.
iv.) The sums of the angles of the faces belonging to some vertex in any 3-dimensional faces of the simplex S are equal.
v.) The perimeters of any two 2-dimensional faces of the simplex S are equal.
vi.) The sums of the angles of the edges belonging to a vertex in any 3-dimensional faces of the simplex S are equal.

We note that in spaces of constant curvature the proof of the equivalence of the first four statements for simplices with ordinary vertices can be found in the article of *MARTINI* (1993).