DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
VII. kötet, 2019

doi:10.20312/dim.2019.06

Elsőrendű differenciálegyenletes modellek

Horváth-Szováti Erika
Soproni Egyetem Matematikai Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Sok tudományterületen fordulnak elő olyan problémák, amelyek megoldásához differenciálegyenletek használata szükséges. Ennek szemléltetése nem egyszerű, mivel hallgatóink csupán egy-két differenciálegyenlet-típusról tanulnak, csak a legfontosabb integrálási módszereket ismerik, és legtöbbször a differenciálegyenletek felírásához nélkülözhetetlen fizikai, kémiai, stb. ismeretekkel sem rendelkeznek. Az itt összegyűjtött egyszerű modellek rávilágítanak a differenciálegyenletek alkalmazásának módjára és szükségességére.

ABSTRACT. These simple practical models highlights the practical application of differential equations. To solve these math problems, students need only a little background knowledge. By these exercises students can see that differential equations are essential in different sciences.

1. Bevezetés

A természettudományokban, gazdaságtudományokban, és még sok más területen gyakran fordulnak elő olyan problémák, amelyekkel kapcsolatban a változás és annak üteme kerül a vizsgálat középpontjába, azaz differenciálegyenlettel oldhatók meg. Napjainkban az agrár-műszaki felsőoktatásban, illetve a műszaki felsőoktatás nem klasszikus (pl. faipari mérnök, mechatronikai mérnök, stb.) szakjain BSc képzésben legtöbb intézményben a matematika óraszámok csökkenése tapasztalható. Emiatt egyre kevesebb idő jut a differenciálszámítás, integrálszámítás és differenciálegyenletek témakörére. Az integrálási módszerek közül csak a fontosabbakat tanítjuk, és a differenciálegyenletek témakörét is csak érintőlegesen, csupán egy-két típus erejéig tárgyaljuk. Az itt bemutatásra kerülő viszonylag egyszerű feladatok differenciálegyenlettel történő megoldása hallgatóink matematikai ismereteivel is lehetséges. A szükséges fizikai, kémiai, és egyéb ismereteket a feladatok szövegében röviden összefoglaltuk. A folyamatot leíró differenciálegyenlet a példában adott, csupán annak értelmezése és megoldása, valamint az esetleges további kérdések megválaszolása a feladat. Az itt összegyűjtött modellek segítségével rávilágíthatunk a differenciálegyenletek alkalmazására, használatuk szükségességére. A feladatokban szereplő ismeretlen függvények különböző jelölései (pl.: $v(t), p(z), T(t)$, stb.) segíthetik a hallgatókat abban, hogy ne csak a szokásos $y(x)$ alakban legyenek képesek a differenciálegyenleteket megoldani, hanem a tudás elsajátításának egy magasabb szintjére lépjenek.

2. Elsőrendű, szétválasztható változójú differenciálegyenlettel megoldható feladatok

1. Egy $30\,\frac{m}{s}$ *kezdősebességgel magára hagyott motorcsónak sebessége az indulástól számított 30 másodperc időpillanatban* $15\,\frac{m}{s}$*. Jelöljük* $v(t)$*-vel a motorcsónak sebesség-idő függvényét. A test sebessége minden időpillanatban a pillanatnyi sebesség négyzetével arányosan csökken:* $-v'(t) = k \cdot v^2(t)$ *, ahol* $k(\in \mathbb{R})$ *arányossági tényező, neve közegellenállási együttható. Mekkora lesz a csónak sebessége az indulástól számított 60 másodperc múlva?*

Megoldás.
A feladatban adott differenciálegyenletből indulunk ki, amely szétválasztható változójú:

$$-\frac{v'(t)}{v^2(t)} = k,$$

$$\int -\frac{v'(t)}{v^2(t)}dt = \int kdt,$$

$$\frac{1}{v(t)} = kt + C,$$

$$v(t) = \frac{1}{kt+C}, \quad k, C \in \mathbb{R}\,.$$

A kapott függvényben lévő két szabadon választható paraméter (k és C) értékét a kezdeti feltételekkel határozzuk meg. Adott volt, hogy a test sebessége a $t = 0\ s$ időpillanatban $30\,\frac{m}{s}$, és $t = 30\ s$ időpillanatban pedig $15\,\frac{m}{s}$:

$$v(0) = 30\,,$$
$$v(30) = 15\,.$$

Ezeket behelyettesítve az általános megoldásba az

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{k \cdot 0 + C} &= 30 \\ \frac{1}{k \cdot 30 + C} &= 15 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $C = \frac{1}{30}$, ezt beírva a másodikba $k = \frac{1}{900}$ adódik. Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$v(t) = \frac{900}{t+30},$$

amelyből kiszámoljuk a csónak sebességét az indulástól számított 60 másodperc elteltével:

$$v(60) = \frac{900}{90} = 10\left(\frac{m}{s}\right).$$

2. Egy $v_0 = 100\ \frac{m}{s}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé kilőtt rakéta sebesség-idő függvényét jelöljük $v(t)$-vel. A sebesség csökkenését minden időpillanatban a rakétára lefelé ható gravitációs gyorsulás ($g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$), illetve a közegellenállás okozza, ez utóbbi a rakéta pillanatnyi sebességének négyzetével egyenesen arányos, azaz: $-v'(t) = g + k \cdot v^2(t)$, ahol a $k(\in \mathbb{R})$ arányossági tényező neve közegellenállási együttható. (Feltesszük, hogy a rakéta mozgását akadályozó légellenállás állandó.) A pálya legmagasabb pontján a rakéta sebessége $0\frac{m}{s}$. Határozzuk meg a $v(t)$ függvényt és azt a T időpillanatot, amikor a rakéta eléri pályájának lemagasabb pontját!

Megoldás.
A differenciálegyenlet változóit szétválasztjuk és az integrálást elvégezzük:

$$\frac{v\prime(t)}{1+\frac{k}{10}v^2(t)} = -10,$$

$$\int \frac{v\prime(t)}{1+\left(\sqrt{\frac{k}{10}}v(t)\right)^2}dt = -\int 10dt,$$

$$arctg\left(\sqrt{\frac{k}{10}}v(t)\right) = \sqrt{\frac{k}{10}}(-10t + C)\ , \quad C\epsilon\, \mathbb{R}\,.$$

A $\sqrt{\frac{k}{10}} \cdot C = C_2$ $(C_2 \in \mathbb{R})$ új konstanst bevezetve

$$arctg\left(\sqrt{\frac{k}{10}}v(t)\right) = -\sqrt{10k} \cdot t + C_2,$$

ebből a következő sebesség-idő függvényt kapjuk:

$$v(t) = \sqrt{\frac{10}{k}} \cdot tg\left(C_2 - \sqrt{10k} \cdot t\right), \quad k, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Adott a feladatban, hogy a rakéta sebessége a $t = 0$ másodperc időpillanatban $100\frac{m}{s}$, illetve a keresett T időpillanatban a sebessége $0\frac{m}{s}$. Ezeket visszaírjuk az általános megoldásba:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{10}{k}} \cdot tg\left(C_2 - \sqrt{10k} \cdot 0\right) = 100 \\ \sqrt{\frac{10}{k}} \cdot tg\left(C_2 - \sqrt{10k} \cdot T\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből: $C_2 = arc\ tg\left(\sqrt{1000k}\right)$, a másodikból: $T = \frac{C_2}{\sqrt{10k}}$. Behelyettesítve C_2-t a T kifejezésébe:

$$T = \frac{arc\ tg\left(\sqrt{1000k}\right)}{\sqrt{10k}}\,,$$

ahol $k(\in \mathbb{R})$ a közegellenállási együttható.

3. Minden vízcsepp a felszínével arányos sebességgel párolog el. Egy közelítőleg gömb alakú vízcsepp átmérője kezdetben 3 mm, 20 másodperc múlva pedig 1 mm. Jelöljük $d(t)$-vel a vízcsepp átmérőjét az idő függvényében. Az átmérő csökkenésének sebessége tehát arányos a gömb felszínével, emiatt az átmérő négyzetével is, azaz: $-d'(t) = A \cdot d^2(t)$, ahol $A \in \mathbb{R}$ arányossági tényező. Mekkora lesz a vízcsepp átmérője 50 másodperc elteltével?

Megoldás.
A feladatban adott differenciálegyenletből indulunk ki, amely szétválasztható változójú. Megoldásának menete hasonló az előző feladatban leírtakhoz, így nem részletezzük:

$$-\frac{d'(t)}{d^2(t)} = A,$$
$$\vdots$$
$$d(t) = \frac{1}{At+C}\,, \quad A, C \in \mathbb{R}.$$

Az A és C konstansok értékeit a kezdeti feltételekből meghatározzuk. A vízcsepp átmérője a $t = 0\ s$ időpillanatban 3 mm, $t = 20\ s$ esetén pedig 1 mm, azaz: $d(0) = 3$, $d(20) = 1$. Ezeket visszaírva az általános megoldásba egy egyenletrendszert kapunk, melynek megoldása $A = \frac{1}{30}$ és $C = \frac{1}{3}$. A kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás tehát:

$$d(t) = \frac{1}{\frac{1}{30}t+\frac{1}{3}} = \frac{30}{t+10}.$$

Ebből kiszámoljuk a vízcsepp átmérőjét 50 másodperc múlva:

$$d(50) = \frac{30}{60} = 0{,}5\ (\text{mm})\,.$$

4. Egy radioaktív anyag bomlását vizsgáljuk. A bomlási folyamat kezdetekor 100 db radioaktív atom volt, az anyag felezési ideje 1 perc. Hány darab sugárzó atom lesz a bomlási folyamat kezdetétől számított másfél perc múlva? Jelöljük $N(t)$-vel a sugárzó (még nem el nem bomlott) atomok számát. Radioaktív bomlás során a radioaktív atomok számának csökkenési sebessége minden időpillanatban arányos a még el nem bomlott atomok számával: $N'(t) = -A \cdot N(t)$, ahol $A \in \mathbb{R}$ arányossági tényező.

Megoldás.
A feladatban adott differenciálegyenlet szétválasztható változójú:

$$\int \frac{N'(t)}{N(t)}dt = \int -Adt,$$

$$ln|N(t)| = -At + C, \qquad C \in \mathbb{R}\,,$$

$$|N(t)| = e^{-At+C},$$

$$N(t) = \pm e^C e^{-At}.$$

A $\pm e^C = C_2$ ($C_2 \in \mathbb{R}$) új konstanst bevezetve a következő megoldás adódik:

$$N(t) = C_2 e^{-At}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása két szabadon választható paramétert (A és C_2) tartalmaz. Ezek értékeit a feladat szövegében lévő kezdeti feltételek segítségével határozzuk meg:

$$N(0) = 100,$$

illetve a vizsgált anyag felezési ideje 1 perc, azaz 60 másodperc:

$$N(60) = 50\ .$$

A kezdeti feltételeket behelyettesítve az általános megoldásba a

$$\left.\begin{aligned} C_2 e^{-A\cdot 0} &= 100 \\ C_2 e^{-A\cdot 60} &= 50 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $C_2 = 100$, ezt visszaírva a másodikba, és kifejezve a másik konstanst:

$$A = \frac{ln2}{60}\ .$$

Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás

$$N(t) = 100e^{-\frac{ln2}{60}t}.$$

Ebből kiszámítjuk a radioaktív atommagok számát a bomlási folyamat kezdetétől számított másfél perc, azaz 90 másodperc múlva:

$$N(90) = 100e^{-\frac{ln2}{60}\cdot 90} \approx 35 \text{ (db)}.$$

5. A légnyomás a magasság növekedésével csökken. Jelöljük $p(z)$-vel a légnyomás-magasság függvényt. Nagy magasságkülönbségek estén a légnyomás magasságtól való függését a $p'(z) = -Ap(z)$ differenciálegyenlet írja le (ahol $A \in \mathbb{R}$), azonos hőmérsékletű légoszlopot feltételezve. (A Föld légkörének hőmérséklete kb. 11 km magasságig kilométerenként kb. $6{,}5°\text{C} -$kal csökken, így a hőmérsékletet tekinthetjük állandónak.) Tudjuk, hogy a légnyomás tengerszinten átlagosan $1013\ hPa$, illetve tengerszint felett 300 méteres magasságban átlagosan 977 hPa. Határozzuk meg a légnyomás értékét a tengerszint felett 1000 méteres magasságban!

Megoldás.
A feladatban adott szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldásának menete hasonló az előző feladatban leírtakhoz, így nem részletezzük:

$$\int \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \int -A dz,$$

$$\vdots$$

$$p(z) = Ce^{-Az}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A differenciálegyenlet megoldásául kapott $p(z)$ függvény neve barometrikus magasságformula. A kezdeti feltételek szerint $p(0) = 1013$, és $p(300) = 977$, ezeket behelyettesítve az általános megoldásba az

$$\left.\begin{array}{r} Ce^{-A\cdot 0} = 1013 \\ Ce^{-A\cdot 300} = 977 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $C = 1013$, ezt visszaírva a másodikba és a másik konstanst kifejezve:

$$A = -\frac{1}{300} ln \frac{977}{1013}.$$

Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$p(z) = 1013e^{\frac{z}{300}ln\frac{977}{1013}}.$$

Ennek segítségével kiszámítjuk az 1000 méter magasságban lévő légnyomás értékét:

$$p(1000) = 1013e^{\frac{1000}{300}ln\frac{977}{1013}} \approx 886{,}37 \text{ (hPa)}.$$

Megjegyzés:
A légnyomás értékének becslésekor a Föld felszínének közelében 100 méterenként közelítőleg 1,2 kPa légnyomás csökkenéssel szoktak számolni. Esetünkben ez a becslés $p(1000) = 1013 - 120 = 893$ (hPa) eredményt adott volna.

6. *Egy henger alakú tartályban* $1{,}44$ *m magasságig víz áll. A tartály alján egy kör alakú lefolyónyílás van dugóval bezárva. Kihúzzuk a dugót. Jelöljük* $h(t)$*-vel a tartályban lévő vízoszlop magasság-idő függvényét. A vízoszlop magassága minden időpillanatban a pillanatnyi magasság négyzetgyökével arányosan csökken, azaz:* $-h'(t) = A \cdot \sqrt{h(t)}$*, ahol* $A \in \mathbb{R}$ *arányossági tényező. A dugó kihúzásától számított* 1 *perc múlva a víz magassága* 1 *m. Mennyi idő alatt ürül ki a tartály?*

Megoldás.
A differenciálegyenlet változóit szétválasztjuk, az integrálást elvégezzük és az egyenletet $\mathrm{h(t)}$-re rendezzük:

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{\mathrm{h(t)}}} = -A,$$

$$\int \frac{h'(t)}{\sqrt{\mathrm{h(t)}}} dt = \int -Adt,$$

$$2\sqrt{\mathrm{h(t)}} = -At + C_1,\ A, C_1 \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{h(t)} = \left(-\frac{A}{2}t + \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(C_1 - At)^2.$$

A kezdeti feltételek szerint $h(0) = 1{,}44$, és $h(1) = 1$ (az időt percben mérjük, a magasságot méterben). A megoldás utolsó, explicit alakjában szereplő négyzetre emelés a konstansok meghatározását kicsit bonyolítja. (Az első kezdeti feltételt ebbe visszaírva $C_1 = \pm 2{,}4$, a két C_1 érték mindegyikéhez A-ra szintén két-két eredményt kapunk. Természetesen később kiderül, hogy melyek azok a konstans értékek, amelyek nem tesznek eleget a követelményeknek.) Ehelyett egyszerűbben meg tudjuk határozni a konstansokat a levezetés utolsó előtti sorából, vagyis a differenciálegyenlet általános megoldásának implicit alakjából:

$$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{1{,}44} &= -A\cdot 0 + C_1 \\ 2\sqrt{1} &= -A\cdot 1 + C_1 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből $C_1 = 2{,}4$, ezt visszaírva a másodikba az $A = 0{,}4$ eredmény adódik. A konstansokat behelyettesítve az általános megoldás explicit alakjába a következő partikuláris megoldást kapjuk:

$$h_p(\mathrm{t}) = \frac{1}{4}(2{,}4 - 0{,}4t)^2 = (1{,}2 - 0{,}2t)^2 \,.$$

Ebből meg tudjuk határozni, hogy mennyi idő alatt ürül ki a tartály:

$$0 = (1{,}2 - 0{,}2t)^2,$$

$$t = 6\ (perc).$$

7. Lekvárfőzéskor egy üveg lekvár hőmérséklete 20°C*-os környezetben 10 perc alatt hűl le* 100°C*-ról* 80°C*-ra. Határozzuk meg a test hőmérsékletét a vizsgálat kezdetétől számított 30 perc múlva. Mikor lesz a test hőmérséklete* 40°C *-os? Jelöljük* $T(t)$ *-vel a lekvár hőmérséklet-idő függvényét. A Newton-féle hűlési törvény szerint egy test hőmérsékletének változása egyenesen arányos a test és a környezet hőmérsékletének különbségével, azaz:* $T'(t) = -\lambda(T(t) - T_k)$*, ahol* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *arányossági tényező a test anyagára és alakjára jellemző pozitív állandó,* T_k *pedig a környezet hőmérséklete.*

Megoldás.
A feladatban adott differenciálegyenletből indulunk ki, amely szétválasztható változójú:

$$\frac{T'(t)}{T(t)-T_k} = -\lambda,$$

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)-T_k}\,dt = \int -\lambda dt,$$

$$ln|T(t) - T_k| = -\lambda t + C, \quad C \in \mathbb{R}\,,$$

$$|T(t) - T_k| = e^{-\lambda t + C},$$

$$T(t) - T_k = \pm e^{-\lambda t} e^{C}.$$

A $\pm e^C = C_2$ $(C_2 \in \mathbb{R})$ konstanst bevezetve:

$$T(t) = C_2 e^{-\lambda t} + T_k\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+\,, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Az egyenletbe behelyettesítjük a $T_k = 20$ értéket, vagyis a környezet feladatban adott hőmérsékletét. A függvényben lévő két szabadon választható paraméter (λ és C_2) értékét a feladat által megadott kezdeti feltételek ($T(0) = 100,\ T(10) = 80$) általános megoldásba történő behelyettesítésével kapjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} 100 &= C_2 e^{-\lambda\cdot 0} + 20 \\ 80 &= C_2 e^{-\lambda\cdot 10} + 20 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből $C_2 = 80$, ezt visszaírva a másodikba:

$$\lambda = -\frac{1}{10} ln\frac{3}{4}.$$

A kezdeti feltételeknek megfelelő konstansok értékeit behelyettesítjük az általános megoldásba, így megkapjuk a partikuláris megoldást, amely megadja a lekvár hőmérsékletét az idő függvényében:

$$T(t) = 80e^{\frac{t}{10}ln\frac{3}{4}} + 20.$$

Ebből kiszámítjuk, hogy hány fokos lesz a lekvár hőmérséklete 30 perc múlva:

$$T(30) = 80e^{\frac{30}{10}ln\frac{3}{4}} + 20 = 53{,}75°,$$

illetve azt is, hogy mikor lesz a lekvár hőmérséklete 40°C-os:

$$80e^{\frac{t}{10}ln\frac{3}{4}} + 20 = 40,$$

$$e^{\frac{t}{10}ln\frac{3}{4}} = \frac{1}{4},$$

$$t = 10 \cdot \frac{ln\frac{1}{4}}{ln\frac{3}{4}} \approx 48{,}19 \text{ (perc)}.$$

Megjegyzés:
A $\lim\limits_{t\to\infty} T(t)$ határértéket vizsgálva látható, hogy a lekvár idővel felveszi a környezet hőmérsékletét, azaz a függvény eleget tesz annak, amit a fizikai ismereteink alapján várunk:

$$\lim_{t\to\infty}\left(80e^{\frac{t}{10}ln\frac{3}{4}} + 20\right) = \lim_{t\to\infty}(80e^{-0{,}0288\cdot t} + 20) = 20.$$

8. Egy csésze kávéba 10 g cukrot teszünk. Fél perc múlva már csak 1 g fel nem oldott cukor van benne. Mennyi lesz a még fel nem oldódott cukor mennyisége 1 perc múlva? Mikor oldódik fel a cukor 99,9%-a? És az összes cukor? Jelöljük $m(t)$-vel a még fel nem oldódott cukor tömegét az idő függvényében, továbbá legyen m_k a kávéba tett cukor tömege. Az oldódás sebessége arányos a még fel nem oldódott cukor mennyiségével: $m'(t) = A\big(m_k - m(t)\big)$, ahol $A \in \mathbb{R}$ arányossági tényező.

Megoldás.
A feladatban adott differenciálegyenletből indulunk ki, amely az előbbihez hasonló szétválasztható változójú differenciálegyenlet. A megoldás lépéseit nem részletezzük:

$$\frac{m'(t)}{m_k - m(t)} = A$$

$$\vdots$$

$$m_k - m(t) = \pm e^{-At}e^{-C}, \text{ ahol } A, C \in \mathbb{R}.$$

A $\pm e^{-C} = C_2$ (ahol $C_2 \in \mathbb{R}$), illetve a $-A = A_2$ ($A_2 \in \mathbb{R}$) konstansokat bevezetve:

$$m(t) = m_k - C_2 e^{A_2 t}, \qquad A_2, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A kapott függvényben lévő két szabadon választható paraméter (A_2 és C_2) értékét a kezdeti feltételekkel határozzuk meg. Ezek $m(0) = 0$, hiszen a $t = 0$ időpillanatban még nincs feloldódott cukor, illetve $m(30) = 9$, mert fél perc múlva már 9 g cukor feloldódott. Behelyettesítjük az egyenletbe az $m_k = 10$ értéket is, azaz az

$$\left.\begin{aligned} 10 - C_2 e^{A_2 \cdot 0} &= 0 \\ 10 - C_2 e^{A_2 \cdot 30} &= 9 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $C_2 = 10$, ezt visszaírva a másodikba

$$A_2 = \frac{1}{30} ln \frac{1}{10}$$

adódik. Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$m(t) = 10 - 10e^{\frac{t}{30}ln\frac{1}{10}} = 10\left(1 - e^{\frac{t}{30}ln\frac{1}{10}}\right).$$

Ebből kiszámoljuk a 1 perc elteltével feloldódott cukor mennyiségét:

$$m(60) = 10\left(1 - e^{\frac{60}{30}ln\frac{1}{10}}\right) \approx 9{,}9\ (g)\,.$$

A feladatban azt is kérdeztük, hogy mikor oldódik fel a cukor 99,9%-a. Ezt a

$$10\left(1 - e^{\frac{t}{30}ln\frac{1}{10}}\right) = 10 \cdot 0{,}999$$

egyenlet megoldásával tudjuk meghatározni.

$$e^{\frac{t}{30}ln\frac{1}{10}} = 0{,}001,$$

$$t = 30\frac{ln 0{,}001}{ln\frac{1}{10}} = 90 \text{ (s)}.$$

Tehát 1,5 perc múlva oldódik fel a cukor 99,9%-a. És az összes cukor mikor oldódik fel? A

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = \lim_{t\to\infty} 10\left(1 - e^{\frac{t}{30}ln\frac{1}{10}}\right) = \lim_{t\to\infty} 10(1 - e^{-0{,}0767t}) = 10$$

határértéket vizsgálva is látható, hogy végtelen sok idő szükséges ahhoz, hogy az összes cukor feloldódjon. Akármennyi (véges) ideig várunk, mindig lesz egy kevés még fel nem oldódott cukor, azonban a mennyisége rövid idő alatt az érzékelhetőség határa alá csökken.

3. Összefoglalás

Hallgatóink számára a felsőbb matematikai ismeretek elsajátítása sok esetben nehézségekkel jár. A differenciálegyenletek témaköréből különösen nehéz megtalálnunk azokat a feladatokat és azt a tárgyalásmódot, amely számukra érthető. Bízunk abban, hogy az előzőekben felsorolt differenciálegyenletes modellekkel sikerül elérnünk a célunkat:

- a gyakorlati alkalmazás kiemelésével a problémakör lényegét és jelentőségét még jobban megvilágítjuk,
- a szétválasztható változójú differenciálegyenletek témakörében fellelhető típusok széles körére találhatók példák közöttük,
- a differenciálegyenletekkel kapcsolatos fogalmakat még jobban elmélyítjük (pl. a megoldás explicit és implicit alakja, általános megoldás, partikuláris megoldás),
- a fizikai, kémiai ismeretek hiánya nem akadályozza a hallgatókat a probléma megoldásában (a differenciálegyenleteket és a szükséges háttérismereteket a feladatok megadják),
- a függvényhatárérték egy-két gyakorlati alkalmazása ezt a témakört is közelebb hozza a hallgatókhoz.

Meggyőződésünk, hogy a matematika tanulása által hallgatóink olyan kompetenciákra tesznek szert, amelyek a munkahelyek világában és a tudományos élet más területein is gondolkodóvá, precízebbé, kreatívabbá, sikeresebbé teszi őket. Hiszen „a matematika hozzászoktatja a szemünket ahhoz, hogy tisztán és világosan lássa az igazságot” (René Descartes).

Irodalomjegyzék

[1] **Budó Ágoston**: Kísérleti fizika I-III., Tankönyvkiadó Budapest, 1978.
[2] **Geda Gábor**: Modellezés és szimuláció az oktatásban,. Educatio Kht., 2011. https://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038_informatika_Geda_Gabor-Modellezes_es_szimulacio_az_oktatasban/ch04s05.html
[3] **Hatvani László – Pintér Lajos**: Differenciálegyenletes modellek a középiskolában. Polygon, Szeged, 1997.
[4] **Kurics Tamás**: Differenciálegyenletek. ELTE Jegyzet, 2011. http://web.cs.elte.hu/~kuricst/bboard/notes/foldtuddiff_ea.pdf
[5] **Ponomarjov, K.K.**: Differenciálegyenletek felállítása és megoldása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
[6] **Scharnitzky Viktor**: Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.
[7] **Szaszkó-Bogár Viktor**: Közönséges differenciálegyenletek http://www.staff.u-szeged.hu/~vszaszko/ODE%2020130902.pdf
[8] **Terjéki József**: Differenciálegyenletek. Polygon, Szeged, 1997.