

## Az általánosított hiperbolikus kvaternióalgebrákról

Péntek Kálmán

ELTE SEK TTMK Savaria Matematikai Tanszék  
pentek.kalman@sek.elte.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A dolgozatban először Macfarlane klasszikus  $M$  hiperbolikus kvaternióit általánosítjuk és megkonstruáljuk az általánosított hiperbolikus kvaterniók  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  nem kommutatív és nem asszociatív algebráját. Minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf egy teljes mátrixalgebra részalgebrájával, de az általánosított hiperbolikus kvaterniók  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  algebrája nem asszociatív. E probléma megoldására Zorn, M.A. definiálta a vektor-mátrix struktúrákat a split (hasított) oktoniók algebrájának leírására 1933-ban. A dolgozat utolsó fejezetében megkonstruáljuk az  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  általánosított hiperbolikus kvaterniók általánosított vektor-mátrix reprezentációját.

**ABSTRACT.** In the paper at first we generalize Macfarlane's classical hyperbolic quaternions  $M$ , and we construct the non commutative and non associative algebras of generalized hyperbolic quaternions  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ . Any finite dimensional associative algebra is algebraically isomorphic to a subalgebra of a total matrix algebra, but the algebras of generalized hyperbolic quaternions  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  is not associative. To overcome this problem Zorn, M.A. defined the vector-matrix structures for description split octonions algebra in 1933. In the last section of the paper we construct the generalized vector-matrix representation of generalized hyperbolic quaternions  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ .

### 1. Bevezetés

Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) ír matematikus, fizikus és csillagász 1833-ban dolgozta ki a klasszikus komplex számok  $\mathbb{C}$  algebrájának a rendezett valós számpárokon alapuló felépítését (*HAMILTON 1834,1837*). A komplex számok használata hatékony és elegáns módszert kínált síkgeometriai problémák analitikus megoldására. Hamilton ezért kísérletezett a rendezett valós számhármassok algebrájának kidolgozásával, ettől remélte ugyanis a síkbeli esettel analóg módon a térgeometriai feladatok eredményes, analitikus módszerrel történő tárgyalását.

Csak 1843-ban ismerte fel, hogy célját rendezett valós számnégyesek segítségével érheti el és sikeresen meg is alkotta a  $\mathbb{H}$  valós kvaterniók nem kommutatív, de asszociatív algebráját (*HAMILTON 1844,1847*). Élete hátralevő részét a kvaternióelmélet minél teljesebb kidolgozásának szentelte (*ROSENFELD 1997, WARD 1997*).

A valós kvaterniók algebráját Leonard Eugene Dickson (1874 – 1954) amerikai matematikus általánosította 1912-ben (*DICKSON 1912*), vélhetően Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882 – 1948) skót származású amerikai matematikus inspirációjára, és bevezette egy test feletti  $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$  általánosított kvaternióalgebra fogalmát (*JAFARI – YAYLI 2015*). E struktúra részletes magyarnyelvű bemutatását találhatjuk pl. Péntek K. dolgozatában (*PÉNTEK 2018*).

A szintén skót származású amerikai matematikus és fizikus Alexander Macfarlane (1851 – 1913) 1891-ben alkotta meg Hamilton klasszikus kvaternióinak mintájára a hiperbolikus kvaterniók  $\mathbb{M}$  nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját (*MACFARLANE 1900*).

Tudjuk, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a megfelelően választott teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebrájával, vagyis minden ilyen algebrának megadhatjuk a mátrix-reprezentációját. A nem asszociatív algebrák azonban nem reprezentálhatók mátrixokkal. Max August Zorn (1906 – 1993) német származású amerikai matematikus 1933-ban viszont sikeresen reprezentálta a split (hasított) oktoniók nem kommutatív és nem asszociatív algebráját vektor-mátrixok segítségével (*ZORN 1931, 1933, KARATAS – HALICI 2018*).

Ebben a dolgozatban a Dickson által alkalmazott eljárással analóg módon általánosítjuk a klasszikus hiperbolikus kvaterniók  $\mathbb{M}$  algebráját és értelmezzük az általánosított hiperbolikus kvaterniók  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  struktúráját, majd megvizsgáljuk algebrai tulajdonságait. A dolgozat fő eredményeként pedig megadjuk az  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  nem kommutatív és nem asszociatív algebrának alkalmas vektor-mátrixokkal történő reprezentációját.

## 2. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók

### 2.1. A Macfarlane-féle klasszikus hiperbolikus kvaterniók

Legyen  $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$  a valós számok teste a 0 összeadási és 1 szorzási neutrális elemmel. Ekkor az

$$\mathbb{M} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}; i, j, k \notin \mathbb{R}\} \quad (1)$$

alakú kifejezéseket a klasszikus hiperbolikus kvaterniók halmazának nevezzük, ha az  $\{1, i, j, k\}$  kvaternióegységek eleget tesznek az alábbi szorzási szabályoknak:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1, & 1 \cdot i &= i \cdot 1 = i, & 1 \cdot j &= j \cdot 1 = j, & 1 \cdot k &= k \cdot 1 = k \\ & & i^2 &= 1, & j^2 &= 1, & k^2 &= 1 \\ i \cdot j &= -j \cdot i = k, & j \cdot k &= -k \cdot j = i, & k \cdot i &= -i \cdot k = j. \end{aligned} \quad (2)$$

Az  $\mathbb{M}$  halmazban értelmezhetünk skalárral való szorzást, összeadást és (2) felhasználásával a szokásos algebraszerkesztés homogén és disztributív szabályait követve szorzást is (*KANTOR – SZOLODOVNYIKOV 1985*) a következő módon. Tetszőleges

$$r \in \mathbb{R}, \quad a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}$$

esetén a skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k \quad (3)$$

az összeadás:

$$\begin{aligned} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k \end{aligned} \quad (4)$$

a szorzás:

$$\begin{aligned} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ (a \cdot b' + b \cdot a' + c \cdot d' - d \cdot c') \cdot i + \\ (a \cdot c' - b \cdot d' + c \cdot a' + d \cdot b') \cdot j + \\ (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k \end{aligned} \quad (5)$$

A hiperbolikus kvaterniók  $\mathbb{M}$  halmaza a rajta értelmezett (3), (4) és (5) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív és nem asszociatív algebrát alkot az  $\mathbb{R}$  valós test felett.

A hiperbolikus kvaterniókat bemutató első dolgozat 1900-ban látott napvilágot az alkotó (*MACFARLANE 1900*) tárgyalásában, de napjainkban is fontos eredményekkel gazdagodik a téma szakirodalma (*KÖSAL 2018*).

## 2.2. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók

L. E. Dickson klasszikus kvaterniók esetén alkalmazott módszerét követve (*JAFARI-YAYLI 2015*) most általánosítjuk a hiperbolikus kvaterniók fogalmát és megvizsgáljuk az így nyert struktúra legfontosabb algebrai tulajdonságait.

Az

$$\mathbb{M}_{\alpha\beta} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}; i, j, k \notin \mathbb{R}\} \quad (6)$$

alakú kifejezéseket az általánosított hiperbolikus kvaterniók halmazának nevezzük akkor és csak akkor, ha az  $\{1, i, j, k\}$  általánosított kvaternióegységek között teljesülnek az alábbi szorzási összefüggések:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k \\ i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta, \quad k^2 = \alpha \cdot \beta \\ i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = \beta \cdot i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = \alpha \cdot j, \end{aligned} \quad (7)$$

ahol  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  rögzített valós paraméterek.

Az  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  halmazban műveleteket értelmezhetünk, skalárral való szorzást és összeadást, továbbá a (7) alapján az algebraszerkesztés szabályait alkalmazva még egy szorzást is a következő módon. Tetszőleges

$$r \in \mathbb{R}, a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$$

esetén a skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k \quad (8)$$

az összeadás:

$$\begin{aligned} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k \end{aligned} \quad (9)$$

a szorzás:

$$\begin{aligned} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ (a \cdot a' + \alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + \\ (a \cdot b' + b \cdot a' + \beta \cdot c \cdot d' - \beta \cdot d \cdot c') \cdot i + \\ (a \cdot c' - \alpha \cdot b \cdot d' + c \cdot a' + \alpha \cdot d \cdot b') \cdot j + \\ (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k \end{aligned} \quad (9)$$

**1. Tétel.** Az általánosított hiperbolikus kvaterniók  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  halmaza a rajta értelmezett (8),(9) és (10) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem asszociatív algebrát alkot a valós számok  $\mathbb{R}$  teste felett.

**Megjegyzés.** A (7) összefüggés 3. sorából közvetlenül látható, hogy a (10) szorzás nem kommutatív és nem asszociatív. Valóban, pl.  $i \cdot j = k, j \cdot i = -k$ , tehát  $i \cdot j \neq j \cdot i$ , így a szorzás nem kommutatív általában. Másrészt, pl.  $(i \cdot j) \cdot j = k \cdot j = -\beta \cdot i, i \cdot (j \cdot j) = i \cdot \beta = \beta \cdot i$ , ezért  $(i \cdot j) \cdot j \neq i \cdot (j \cdot j)$ , így a szorzás nem asszociatív általában.

Speciálisan, ha  $\alpha = \beta = 1$ , akkor éppen  $\mathbb{M}_{\alpha\beta} = \mathbb{M}$  teljesül.

**Definíció.** A  $q := a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  konjugáltján a  $\bar{q} = a - b \cdot i - c \cdot j - d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  elemet értjük.

**2. Tétel.** Ha  $r \in \mathbb{R}, q, q' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ , akkor a konjugált képzésére érvényesek a következő tulajdonságok:

- |     |  |                     |
|-----|--|---------------------|
| (a) | $\bar{\bar{q}} = q$                              | involutív,          |
| (b) | $\overline{r \cdot q} = r \cdot \bar{q}$         | homogén,            |
| (c) | $\overline{q + q'} = \bar{q} + \bar{q}'$         | additív,            |
| (d) | $\overline{q \cdot q'} = \bar{q}' \cdot \bar{q}$ | anti-multiplikatív. |

**3. Tétel.** Ha  $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ , akkor érvényes a

$$q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a^2 - \alpha \cdot b^2 - \beta \cdot c^2 - \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \in \mathbb{R}$$

összefüggés.

**Definíció.** A  $q := a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  elem normáján a

$$N(q) := a^2 - \alpha \cdot b^2 - \beta \cdot c^2 - \alpha \cdot \beta \cdot d^2$$

valós számot értjük.

**4. Tétel.** Ha  $q, q' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  tetszőleges elemek, akkor

- |     |  |
|-----|--|
| (a) | $N(q) = N(\bar{q}),$                             |
| (b) | $N(q \cdot q') \neq N(q) \cdot N(q')$ általában. |

**Megjegyzés.** A normafüggvény általában nem multiplikatív, ugyanis pl.  $N(i \cdot j) = N(k) = -\alpha \cdot \beta$ , másrészt  $N(i) \cdot N(j) = (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$ , tehát  $N(i \cdot j) \neq N(i) \cdot N(j)$ .

**Definíció.** Ha  $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ , akkor e két elem skaláris szorzatán a

$$\langle q, q' \rangle := a \cdot a' - \alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

**5. Tétel.** A skaláris szorzat képzése egy  $\mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{R}$  szimmetrikus bilineáris leképezés, tetszőleges  $r \in \mathbb{R}, q, q', q'' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  esetén

- |     |   |                       |
|-----|---|-----------------------|
| (a) | $\langle q, q' \rangle = \langle q', q \rangle$   | kommutatív,           |
| (b) | $\langle r \cdot q, q' \rangle = \langle q, r \cdot q' \rangle = r \cdot \langle q, q' \rangle$ | homogén,              |
| (c) | $\langle q, q' + q'' \rangle = \langle q, q' \rangle + \langle q, q'' \rangle$                  | balról disztributív,  |
| (d) | $\langle q + q', q'' \rangle = \langle q, q'' \rangle + \langle q', q'' \rangle$                | jobbról disztributív. |

Látható, hogy egy általánosított hiperbolikus kvaternió normája a skaláris szorzatból származtatható, hiszen ha  $q \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ , akkor a norma és a skaláris szorzat fenti értelmezése szerint  $N(q) = \langle q, q \rangle$  teljesül.

**6. Tétel.** Tetszőleges  $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  elempár skaláris szorzata előállítható a következő

$$\langle q, q' \rangle = (a, b, c, d) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$$

alakban.

**Megjegyzés.** A 6.T. előállításából jól látható, hogy az  $\alpha = \beta = 1$  esetén adódó klasszikus  $\mathbb{M}$  hiperbolikus kvaterniók egy Minkowski metrikájú algebrát alkotnak.

**Definíció.** Az  $\mathbb{R}$  feletti  $\mathcal{A}$  egy *alternáló algebra* akkor és csak akkor, ha bármely  $x, y \in \mathcal{A}$  esetén teljesül az  $(x \cdot x) \cdot y = x \cdot (x \cdot y)$  és az  $(x \cdot y) \cdot y = x \cdot (y \cdot y)$  azonosság.

**7. Tétel.** Az  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  algebra nem alternáló.

BIZONYÍTÁS. Egyrészt  $(i \cdot i) \cdot j = \alpha \cdot j$  és  $i \cdot (i \cdot j) = i \cdot k = -\alpha \cdot j$ , így  $(i \cdot i) \cdot j \neq i \cdot (i \cdot j)$ . Másrészt  $(i \cdot j) \cdot j = k \cdot j = -\beta \cdot i$  és  $i \cdot (j \cdot j) = i \cdot \beta = \beta \cdot i$ , ezért  $(i \cdot j) \cdot j \neq i \cdot (j \cdot j)$ .  $\square$

**Definíció.** Az  $\mathbb{R}$  feletti,  $e$  neutrális elemes  $\mathcal{A}$  egy kvadratikus algebra akkor és csak akkor, ha bármely  $x \in \mathcal{A}$  estén létezik olyan  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , hogy  $x^2 = \lambda \cdot e + \mu \cdot x$  előállítás adható meg.

**8. Tétel.** Az  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  egy kvadratikus algebra.

BIZONYÍTÁS. Ha  $x = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  tetszőleges, akkor az  $x^2 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  egyenlet mindig megoldható a  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ismeretlenekre, s a megoldás:

$$\lambda = -a^2 + \alpha \cdot b^2 + \beta \cdot c^2 + \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \quad \text{és} \quad \mu = 2 \cdot a,$$

ami az állítást bizonyítja.  $\square$

**Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a fenti tételben szereplő  $x \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  elemre teljesül  $N(x) = -\lambda$ , továbbá  $t(x) = \mu$ , ahol  $t(x)$  éppen az  $x \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  elemhez hozzárendelt vektor-mátrix nyoma (lásd alább). Az  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  algebra kvadratikus voltát leíró összefüggés így az  $x^2 = -N(x) + t(x) \cdot x$ , vagyis az  $x^2 - t(x) \cdot x + N(x) = 0$  alakot ölti.

**Megjegyzés.** Jól ismert eredmény, hogy minden véges dimenziós alternáló algebra kvadratikus (EBBINGHAUS ET AL. 1991), így a fentiek szerint az  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  egy olyan  $\mathbb{R}$  feletti 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív és nem asszociatív algebra, amelyik kvadratikus, de nem alternáló algebra.

### 2.3. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók vektorgeometriája

**Definíció.** A  $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  tetszőleges általánosított hiperbolikus kvaternió *valós részén* (skalár rész) az

$$S(q) := a \in \mathbb{R}$$

valós számot, *képzetes részén* (vektor rész) pedig a

$$V(q) := b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{R}^3$$

vektort értjük.

**Definíció.** Az  $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) := \{0 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  alakú általánosított hiperbolikus kvaterniókat tiszta képzetes kvaternióknak nevezzük.

Legyen  $q := b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ ,  $q' := b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  két tiszta képzetes hiperbolikus kvaternió, akkor szorzatuk

$$q \cdot q' := -(-\alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + [(c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k]$$

lesz, ez indokolja a következő kettős definíciót.

**Definíció.** Két tiszta képzetes hiperbolikus kvaternió *skaláris szorzatán* a

$$q \circ q' := -\alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$$

valós számot, *vektoriális szorzatán* pedig a

$$q \times q' := (c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k \in \mathbb{R}^3$$

vektort értjük.

**Megjegyzés.** Ekkor tehát érvényes a  $q \cdot q' = -q \circ q' + q \times q'$  összefüggés. A tiszta képzetes hiperbolikus kvaterniók  $\circ$  skaláris szorzata az általános hiperbolikus kvaterniók  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skaláris szorzatának leszűkítése, vagyis ha  $q, q' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ , akkor  $q \circ q' = \langle q, q' \rangle$ .

**9. Tétel.** A  $\circ: Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \times Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \rightarrow \mathbb{R}$  skaláris szorzat egy szimmetrikus bilineáris leképezés, tetszőleges  $r \in \mathbb{R}$ ,  $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  esetén

- |     |  |                       |
|-----|--|-----------------------|
| (a) | $q \circ q' = q' \circ q$  | kommutatív,           |
| (b) | $(r \cdot q) \circ q' = q \circ (r \cdot q') = r \cdot (q \circ q')$ | homogén,              |
| (c) | $q \circ (q' + q'') = q \circ q' + q \circ q''$                      | balról disztributív,  |
| (d) | $(q + q') \circ q'' = q \circ q'' + q' \circ q''$                    | jobbról disztributív. |

**10. Tétel.** Az  $\times: Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \times Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \rightarrow Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  vektoriális szorzat egy anti-szimmetrikus bilineáris leképezés, tetszőleges  $r \in \mathbb{R}$ ,  $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  esetén

- |     |  |
|-----|--|
| (a) | $q' \times q = -q \times q'$ anti-kommutatív,                                    |
| (b) | $(r \cdot q) \times q' = q \times (r \cdot q') = r \cdot (q \times q')$ homogén, |
| (c) | $q \times (q' + q'') = q \times q' + q \times q''$ balról disztributív,          |
| (d) | $(q + q') \times q'' = q \times q'' + q' \times q''$ jobbról disztributív,       |
| (e) | $q \times q = \mathbf{0}$ ,  |

ahol  $\mathbf{0} := 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  a zérusvektor.

**Megjegyzés.**  $(i \times j) \times j = k \times j = -\beta \cdot i$  és  $i \times (j \times j) = i \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$ , ezért  $(i \times j) \times j \neq i \times (j \times j)$ , vagyis a vektoriális szorzat az  $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  halmazban általában nem asszociatív.

**Definíció.** Ha  $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ , akkor ezen elemek ilyen sorrendben képezett vegyesszorzatán a

$$qq'q'' := (q \times q') \circ q'' \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

**11. Tétel.** Ha  $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ , akkor

- (a)  $qq'q'' = -\alpha \cdot \beta \cdot \det(q, q', q'')$ ,
- (b)  $qq'q = (q \times q') \circ q = 0$ ,
- (c)  $(q \times q') \circ q'' = q \circ (q' \times q'')$  (invariancia tulajdonság).

**Következmény.** Ha  $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ , akkor  $qq'q'' = q'q''q = q''qq'$  (felcserelési tulajdonság).

**12. Tétel.** (GRASSMANN – azonosság, kifejtési tétel). Bármely  $a, b, c \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  esetén érvényesek:

$$\begin{aligned} (a \times b) \times c &= -[(a \circ c) \cdot b - (b \circ c) \cdot a], \\ a \times (b \times c) &= -[(a \circ c) \cdot b - (a \circ b) \cdot c]. \end{aligned}$$

**13. Tétel.** (JACOBI – azonosság.) Bármely  $a, b, c \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  elemekre érvényesek:

$$\begin{aligned} (a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b &= \mathbf{0}, \\ a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

**14. Tétel.** (LAGRANGE – azonosság.) Bármely  $a, b, c, d \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  elemek esetén érvényes:

$$(a \times b) \circ (c \times d) = - \begin{vmatrix} a \circ c & a \circ d \\ b \circ c & b \circ d \end{vmatrix}.$$

Speciálisan, ha  $a = c, b = d$ , akkor igaz a

**15. Tétel.** (Speciális LAGRANGE – azonosság.) Bármely  $a, b \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  elemekre érvényes:

$$(a \times b) \circ (a \times b) = -[(a \circ a) \cdot (b \circ b) - (a \circ b) \cdot (a \circ b)].$$

Az  $\times$  vektoriális szorzás művelet 10. Tétel. (e) tulajdonsága, e művelet nem asszociatív tulajdonsága és a 13. Tétel első összefüggése alapján érvényes a következő

**16. Tétel.** Az  $\{Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}), +, \times\}$  algebrai struktúra egy LIE algebra.

#### 2.4. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók vektor-mátrix reprezentációja

**Definíció.** A  $Z(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : A_{11}, A_{22} \in \mathbb{R}, A_{12}, A_{21} \in \mathbb{R}^3 \right\}$  alakú hipermátrixok halmazát Zorn – féle vektor-mátrixoknak nevezzük. A  $Z(\mathbb{R})$  halmazban műveleteket értelmezünk a következő módon. Ha  $r \in \mathbb{R}, A, B \in Z(\mathbb{R})$ , akkor a skalárral való szorzás:

$$r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

az összeadás:

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

a szorzás:

$$A * B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} + A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} - A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

E műveletek értelmezése során az  $\mathbb{R}$ , illetve az  $\mathbb{R}^3$  műveleteit, továbbá az  $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$  struktúra  $\circ$  skaláris szorzása és  $\times$  vektoriális szorzása műveleteit használtuk fel.

**17. Tétel.** A  $Z(\mathbb{R})$  halmaz a (11), (12) és (13) műveletekkel egy 8-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot az  $\mathbb{R}$  test felett.

**Definíció.** Jelölje  $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$  azon speciális alakú Zorn-féle vektor-mátrixok halmazát, amelyre teljesülnek az

$$A_{11} = A_{22} = a \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad A_{12} = -A_{21} := (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$$

összefüggések.

**18. Tétel.** A  $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$  halmaz a (11), (12) és (13) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív részalgebrát alkot a  $Z(\mathbb{R})$  algebrában.

**19. Tétel.** Az

$$F: \mathbb{M}_{\alpha\beta} \rightarrow Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R}),$$

$$a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \mapsto \begin{pmatrix} a & (b, c, d) \\ -(b, c, d) & a \end{pmatrix}$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, vagyis egy bijektív és művelettartó leképezés, amelyre tetszőleges  $r \in \mathbb{R}, q, q' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$  esetén teljesül:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & F(r \cdot q) = r \cdot F(q) & \text{homogén,} \\ \text{(b)} & F(q + q') = F(q) + F(q') & \text{additív,} \\ \text{(c)} & F(q \cdot q') = F(q) * F(q') & \text{multiplikatív} \end{array}$$

összefüggés.

A fenti tétel az  $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$  algebra vektor-mátrix reprezentációja.

## Irodalomjegyzék

- [1] **Dickson, L. E.**, Linear algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 13(1), (1912) 59-73.
- [2] **Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K. Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R.**, Numbers. Springer, 1991.
- [3] **Hamilton, W. R.**, On Conjugate function, or algebraic Couples. British Association Report, Edinburg. (1834) 519-523.
- [4] **Hamilton, W. R.**, Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a Preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. Transactions of the Royal Irish Academy, 17(1), (1837) 293-422.
- [5] **Hamilton, W. R.**, On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy, 2 (1844) 424-434.
- [6] **Hamilton, W. R.**, On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy, 3 (1847) 1-16.
- [7] **Jafari, M., Yayli, Y.**, Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, 64(1), (2015) 15-27. [doi:10.1501/Commua1\\_0000000724](https://doi.org/10.1501/Commua1_0000000724).
- [8] **Kantor, I. L., Szolodovnyikov, A. Sz.**, Hiperkomplex számok. Gondolat, Bp., 1985.
- [9] **Karatas, A., Halici, S.**, Vector Matrix Representation of Octonions and Their Geometry. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 67(1), (2018) 161-167. [doi:10.1501/Commua1\\_0000000839](https://doi.org/10.1501/Commua1_0000000839)
- [10] **Kösal, I. A.** A note on hyperbolic quaternions. Universal Journal of Mathematics and Applications, I(3), (2018) 155-159.
- [11] **Macfarlane, A.** Hyperbolic Quaternions. Proceedings of the Royal Society at Edinburgh. vol. 23. (2018) 169 – 180 +figures plate.



- 
- [12] **Péntek, K.**, Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. *Dimenziók, Matematikai Közlemények*, VI. (2018) 25-30. doi:[10.20312/dim.2018.03](https://doi.org/10.20312/dim.2018.03)
- [13] **Rosenfeld, B.**, *Geometry of Lie groups*. Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1997. doi:[10.1007/978-1-4757-5325-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5325-7)
- [14] **Ward, J. P.**, *Quaternions and Cayley Numbers*. Springer Science, Bussines Media B.V, 1997.
- [15] **Zorn M.A.** Theorie der alternativen Ringe. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. Springer Berlin/Heidelberg, (1931) 123-147.
- [16] **Zorn, M. A.**, Alternativkörper und quadratische Systeme. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. Springer Berlin/Heidelberg, (1933) 395-402.