DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
VIII. kötet, 2020


doi:10.20312/dim.2020.06

# Másodrendű differenciálegyenletes modellek

**Horváth-Szováti Erika**
Soproni Egyetem Matematikai Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A természettudományokban sok probléma megoldásához másodrendű differenciálegyenletek felírása és megoldása szükséges. Ezek szemléltetése a hallgatók erősen korlátozott matematikai eszköztára miatt csak alaposan végiggondolt, és a lehetőségekhez mérten maximálisan leegyszerűsített feladatok segítségével lehetséges. Az itt felsorolásra kerülő példák ebben nyújthatnak segítséget.

ABSTRACT. Here are simple practical examples that highlights the practical application of second order differential equations. To solve these math problems, students need only a little background knowledge. By these exercises, the students can see that differential equations are essential in different sciences.

## 1. Bevezetés

A természettudományokban sok folyamat leírása csak differenciálegyenletekkel lehetséges. Ezen belül a másodrendű differenciálegyenletek előfordulása is nagyon gyakori. Egy egyenletesen változó mozgás leírása (pl. szabadesés légellenállással), egy RLC körben az áramforrás elektromotoros erejének időbeli változása, egy hővezető rúd hőmérsékletének változása, stb. mind-mind másodrendű differenciálegyenletekkel leírható problémák. A rezgések differenciálegyenletei is ebbe a csoportba tartoznak, amelyeket a környezetmérnök hallgatók a hangterjedés vizsgálata, a rezgéscsillapítás lehetőségei, a zaj- és rezgésvédelem témakörökben használnak. Tudományos kutatásaik, diplomamunkájuk során szintén találkozhatnak olyan irodalommal, amelyben másodrendű differenciálegyenletek szerepelnek. BSc szinten egy ilyen egyenlet önálló felírása nem cél, azonban az értelmezés, következtetések levonása elvárható. A másodrendű differenciálegyenletek alább összegyűjtött alkalmazásai olyan egyszerű példák, amelyek a csekélyebb matematikai háttértudással rendelkező hallgatókat is segíthetik abban, hogy a témakör jelentőségét megértsék. Itt csak kétféle másodrendű differenciálegyenlet típussal foglalkozunk, azzal a kettővel, amelyeket a BSc képzésben tanítunk. Bízunk abban, hogy az alábbi kidolgozott példák elemzése után a hallgatók más típusú differenciálegyenletek önálló értelmezésétől sem riadnak majd vissza.

## 2. Egyenletesen változó mozgás leírása (két egymást követő integrálással megoldható feladatok)

**2.1. feladat**. Egy gépkocsi $72\ \frac{km}{h}$ sebességről egyenletesen lassulva $10\ s$ alatt áll meg. Mekkora utat tesz meg ezalatt? Jelöljük $x(t)$-vel a megtett utat az idő függvényében. Mivel a gépkocsi egyenletesen lassul, így $\ddot{x}(t) = a,$ ahol $a \in \mathbb{R}$. (Megj.: Fizikából tudjuk, hogy az $x(t)$ függvény idő szerinti első deriváltja a sebesség, a második deriváltja pedig a gyorsulás.)

**Megoldás.** A feladatban adott

$$\ddot{x}(t) = a$$

differenciálegyenletből indulunk ki, kétszer integráljuk mindkét oldalt az idő szerint:

$$\dot{x}(t) = at + C_1$$
$$x(t) = a\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A feladat szövegéből a következő három kezdeti feltétel adódik:

- A test által megtett fékút a fékezés kezdetekor, vagyis a $t = 0\ s$ időpillanatban $0\ m$ volt:

$$x(0) = 0\,.$$

- A test a $t = 0\ s$ időpillanatban $72\ \frac{km}{h} = 20\ \frac{m}{s}$ sebességgel mozgott:

$$\dot{x}(0) = 20\,.$$

- A test $10\ s$ alatt állt meg, vagyis a sebessége ekkor $0\ \frac{m}{s}$ volt:

$$\dot{x}(10) = 0\,.$$

Írjuk be a kezdeti feltételeket a differenciálegyenlet általános megoldásába, illetve az első deriváltba!

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \\ 20 &= a \cdot 0 + C_1 \\ 0 &= a \cdot 10 + C_1 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $C_1 = 20,\ C_2 = 0,\ a = -2$. Ezeket visszahelyettesítve az általános megoldásba megkapjuk a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldást:

$$x_p(t) = -2\frac{t^2}{2} + 20t.$$

Ebből meg tudjuk határozni a keresett utat:

$$x_p(10) = -2\frac{10^2}{2} + 200 = 100\ (m).$$

**Megjegyzés.** Az $x(t) = a\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ általános megoldásban $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$, $a$: a test gyorsulása (vagy lassulása). Tehát valójában a fizikából ismert $s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t$ képlet, amely segítségével a $v_0$ kezdősebességgel rendelkező, $a(> 0)$ egyenletesen gyorsuló (vagy $a(< 0)$ egyenletesen lassuló) test által $t$ idő alatt megtett utat szoktuk kiszámolni.

**2.2. feladat**. Egy $30°$-os hajlásszögű lejtőre helyezett fakocka álló helyzetből indulva, kezdősebesség nélkül csúszik a lejtő tetejéről lefelé. Legyen $x(t)$ a test által megtett út az idő függvényében, $\alpha$ a lejtő hajlásszöge, $g$ a gravitációs gyorsulás ($g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$), és $\mu$ a test és a lejtő anyaga közötti csúszási súrlódási együttható ($\mu = 0{,}5$). Ekkor Newton II. törvénye szerint a test elmozdulását az idő függvényében leíró differenciálegyenlet: $\ddot{x}(t) = g(sin\alpha - \mu cos\alpha)$. Mekkora utat tesz meg a test az indulástól számított 3 másodperc alatt?

**Megoldás.** A feladatban adott differenciálegyenlet másodrendű, hiányos. Két egymást követő integrálással megoldható:

$$\ddot{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha),$$

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha) \cdot t + C_1,$$

$$x(\mathrm{t}) = \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A test álló helyzetből, kezdősebesség nélkül kezd el csúszni a lejtő tetejéről lefelé, azaz adottak a következő kezdeti feltételek: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Ezeket az általános megoldásba, illetve annak deriváltjába visszahelyettesítve:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha) \cdot 0 + C_1 \\ 0 &= \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha) \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. A konstansokat behelyettesítve az általános megoldásba a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldást kapjuk:

$$x_p(\mathrm{t}) = \mathrm{g}(\sin\alpha - \mu cos\alpha) \cdot \frac{t^2}{2}\ .$$

Ebből kiszámítható a test által 3 másodperc alatt megtett út:

$$x_p(3) = \frac{9}{2} \cdot 10 \cdot (\sin 30° - 0{,}5 \cdot cos 30°) \approx 3{,}01\ (m).$$

## 3. Harmonikus rezgések (állandó együtthatós, másodrendű, lineáris differenciálegyenletek)

**3.1. feladat**. Egy rugóra akasztott test harmonikus rezgőmozgást végez, jelöljük $x(t)$-vel a kitérés-idő függvényt. Harmonikus rezgőmozgás esetén a test gyorsulása arányos és ellentétes irányú a kitéréssel, azaz: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$. (Az $\omega$ neve körfrekvencia, továbbá $\omega^2 = \frac{D}{m}$, ahol $D$ a rugóállandó, m a test tömege.) A test kitérése $t = 0$ másodperc időpillanatban 0 méter, a sebessége pedig ugyanekkor $3\ \frac{m}{s}$. Adjuk meg a test kitérését az idő függvényében, ha $\omega = 1\ \left(\frac{1}{s}\right)$! Határozzuk meg a test kitérését a $t = \frac{\pi}{6}$ másodperc időpillanatban!

**Megoldás.** A feladatban egy homogén, állandó együtthatós, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet adott, amelybe behelyettesítve $\omega$ értékét, majd nullára rendezve az

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0$$

egyenletet kapjuk. Az ebből felírható karakterisztikus egyenlet (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$), illetve annak gyökei:

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$
$$\lambda = \pm i,$$

az általános megoldás pedig

$$x(t) = C_1 e^{0t} sint + C_2 e^{0t} cost = C_1 sint + C_2 cost, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Mivel az egyik kezdeti feltétel a sebességet adja meg egy időpillanatban, így szükség van a sebesség-idő függvényre is, amely a kitérés-idő függvény deriváltja:

$$\dot{x}(t) = C_1 cost - C_2 sint.$$

A partikuláris megoldást úgy kapjuk meg, hogy behelyettesítjük a kezdeti feltételeket az általános megoldásba, illetve annak deriváltjába. A szövegben megadottak alapján a test kitérése $t = 0$ másodperc időpillanatban 0 méter, a sebessége pedig ugyanekkor 3 $\frac{m}{s}$ . Eszerint $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = 3$. Ebből a

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \\ C_1 \cdot 1 - C_2 \cdot 0 = 3 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer adódik, amelyből $C_1 = 3$ és $C_2 = 0$, tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás

$$x_p(t) = 3sint.$$

A $t = \frac{\pi}{6}$ másodperc időpillanatban a test az egyensúlyi helyzettől 1,5 méterre lesz:

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3sin\frac{\pi}{6} = 1{,}5.$$

**3.2. feladat**. Egy harmonikus rezgőmozgást végző testre a közegellenállás csillapításként hat, amely a sebességgel arányos, és azzal ellentétes irányú. Ekkor a test mozgását leíró differenciálegyenlet: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) - k\dot{x}(t)$ , ahol $x(t)$ a test kitérése az idő függvényében, az $\omega$ arányossági tényező a körfrekvencia (ld. előző feladat), a $k(> 0)$ pedig a csillapítási konstans, melynek értéke a feladatban $k = 10\ \frac{Ns}{m}$ . A test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0 méter, a sebessége ugyanekkor 12 $\frac{m}{s}$. Adjuk meg a test kitérését az idő függvényében, ha $\omega = 4\ \frac{1}{s}$! Határozzuk meg a test kitérését a $t = 1s$ időpillanatban!

**Megoldás.** Hasonlóan oldjuk meg, mint az előző feladatot. A karakterisztikus egyenlet (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$), illetve annak gyökei:

$$\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 16x(t) = 0,$$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0,$$

$$\lambda = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 16}}{2},$$

amelyből $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -8$, az általános megoldás pedig

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ismét szükség van a sebesség-idő függvényre is, emiatt deriváljuk az előbbi függvényt:

$$\dot{x}(t) = -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t}.$$

A test kitérése $t = 0\ s$ időpillanatban 0 méter, a sebessége pedig ugyanekkor 12 $\frac{m}{s}$, vagyis $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = 12$ . Ezeket behelyettesítve az általános megoldásba, illetve annak deriváltjába:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ -2C_1 - 8C_2 &= 12 \end{aligned}\right\}.$$

Ebből $C_1 = 2$ és $C_2 = -2$ adódik, tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás

$$x_p(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-8t}.$$

A test kitérése az indulástól számított 1 másodperc időpillanatban

$$x_p(1) = 2e^{-2} - 2e^{-8} \approx 0{,}27\ (m).$$

**Megjegyzés.** Egy $m$ tömegű harmonikus rezgőmozgást végző testre $\frac{1}{10} mgsint$ nagyságú periodikus gerjesztő erő hat, ahol $g$ a gravitációs gyorsulás ($g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$). Az egyszerűség kedvéért a csillapítástól eltekintünk. Ekkor a test mozgását leíró differenciálegyenlet: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) + sint$, ahol $x(t)$ a test kitérése az idő függvényében, az $\omega$ arányossági tényező a körfrekvencia, melynek nagysága 2 $\frac{1}{s}$. A test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0 méter, a sebessége ugyanekkor $\frac{7}{3}\frac{m}{s}$. Adjuk meg a test kitérését az idő függvényében! Határozzuk meg a test kitérését a $t = \frac{\pi}{2} s$ időpillanatban!

**Megoldás**. A következő másodrendű, állandó együtthatós, lineáris, inhomogén differenciálegyenletet kell megoldani:

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = sint\ .$$

Először a homogén egyenlet általános megoldását keressük meg. A karakterisztikus egyenlet (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$), illetve annak gyökei:

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0,$$
$$\lambda^2 + 4 = 0,$$
$$\lambda = \pm 2i,$$

amelyből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x(t) = C_1 e^{0t} sin2t + C_2 e^{0t} cos2t = C_1 sin2t + C_2 cos2t, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ezt követően az inhomogén egyenlet partikuláris megoldására próbafüggvényt írunk fel (nincs rezonancia, a feladat egy nagyon egyszerű esetet tárgyal):

$$x_p(t) = Asint + Bcost.$$

Ennek deriváltjait behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe, majd az együtthatókat egyeztetve meg tudjuk határozni azok értékeit:

$$\dot{x}_p(t) = Acost - Bsint,$$
$$\ddot{x}_p(t) = -Asint - Bcost,$$
$$-Asint - Bcost + 4(Asint + Bcost) = sint,$$
$$A = \frac{1}{3}\ ;\ B = 0.$$

Tehát az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$x_p(t) = \frac{1}{3} sint\,.$$

A feladatban szereplő inhomogén differenciálegyenlet megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapjuk:

$$x(t) = C_1 sin2t + C_2 cos2t + \frac{1}{3} sint, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

A kezdeti feltételek miatt szükség van a sebesség-idő függvényre is, emiatt deriváljuk az előbbi függvényt:

$$\dot{x}(t) = 2C_1 cos2t - 2C_2 sin2t + \frac{1}{3} cost.$$

A test kitérése $t = 0\ s$ időpillanatban 0 méter, a sebessége pedig $\frac{7}{3}\frac{m}{s}$, vagyis $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = \frac{7}{3}$. Ezeket behelyettesítve az $x(t)$ általános megoldásba, illetve annak deriváltjába:

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ 2C_1 + \frac{1}{3} &= \frac{7}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Ebből $C_1 = 1$ és $C_2 = 0$ adódik, tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$x_p(t) = sin2t + \frac{1}{3}sint.$$

A test kitérése az indulástól számított $\frac{\pi}{2}$ másodperc időpillanatban:

$$x_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = sin\pi + \frac{1}{3}sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}\ (m).$$

## 3. Összefoglalás

Egyetemünk hallgatói számára a matematika tanulása gyakran – főleg a korábbi hiányosságaik miatt – nehézségekkel jár. A differenciálegyenletek témakörét sokan az „értelmetlen" és „érthetetlen" jelzőkkel illetik. Nehéz megtalálnunk azokat a feladatokat és azt a tárgyalásmódot, amely az átlagos hallgató számára érthető. Az előbbi erősen leegyszerűsített gyakorlati alkalmazások segítségével a másodrendű differenciálegyenletek témakörét próbáltuk megvilágítani. A felsorolt példák ugyan – a témakör tulajdonságai miatt – igényelnek némi matematikai jártasságot, de bízunk benne, hogy a hallgatók ezekhez hasonló feladatok áttekintését követően bátrabban nyúlnak majd a felsőbb matematika eszközeihez.

## Irodalomjegyzék


[1] **Budó Ágoston**: Kísérleti fizika I-III. Tankönyvkiadó Budapest, 1978.
[2] **Geda Gábor**: Modellezés és szimuláció az oktatásban, Educatio Kht., 2011. https://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038_informatika_Geda_Gabor-Modellezes_es_szimulacio_az_oktatasban/ch04s05.html
[3] **Hatvani László** – **Pintér Lajos**: Differenciálegyenletes modellek a középiskolában. Polygon, Szeged, 1997.
[4] **Kurics Tamás**: Differenciálegyenletek. ELTE Jegyzet, 2011. http://web.cs.elte.hu/~kuricst/bboard/notes/foldtuddiff_ea.pdf
[5] **Ponomarjov, K.K.**: Differenciálegyenletek felállítása és megoldása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
[6] **Scharnitzky Viktor**: Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.
[7] **Szaszkó-Bogár Viktor**: Közönséges differenciálegyenletek. http://www.staff.u-szeged.hu/~vszaszko/ODE%2020130902.pdf
[8] **Terjéki József**: Differenciálegyenletek. Polygon, Szeged, 1997.