Matematikai Közlemények
IX. kötet, 2021

doi:10.20312/dim.2021.04

Csillapított rezgések differenciálegyenletes modelljei

Horváth-Szováti Erika
Soproni Egyetem
Informatikai és Matematikai Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A rezgések mozgásegyenletei másodrendű differenciálegyenletek, amelyekkel többek között az erdészeti és környezetvédelemi kutatások területén is gyakran találkozhatunk. Az ilyen típusú differenciálegyenletek konkrét fizikai példákkal történő szemléltetése – a hallgatók gyakran korlátozott matematikai háttértudása miatt – csak alaposan végiggondolt, és a lehetőségekhez mérten maximálisan leegyszerűsített példák segítségével lehetséges.

ABSTRACT. Here are simple practical examples that highlights the practical application of differential equations. To solve these math problems, students need only a little background knowledge. By these exercises students can see that differential equations are essential in different sciences.

1. Bevezetés

A természetben számos jelenség rezgésekként, vagy rezgések összetételeként írható le. Több kölcsönhatás eredményezhet különböző típusú rezgéseket, illetve hullámokat (mechanikai tárgyú rezgések, elektromágneses jelenségek, kvantummechanika, stb.). Az előző évi kiadványban megjelent munka folytatásaként itt a csillapított rezgések mozgásegyenleteit szemléltetem egyszerű példákkal. Ez a téma fontos lehet az erdőmérnök, környezetmérnök, sőt akár a faipari mérnök hallgatók számára is, ugyanis a hangterjedés vizsgálata, a rezgéscsillapítás lehetőségei, valamint a zaj- és rezgésvédelem témakörök során találkozhatnak ilyen rezgéstípusokkal. A matematika oktatásakor gyakran szembesülünk azzal, hogy egy adott tananyag nehezen köthető össze konkrét, mérnöki alkalmazásokkal. Ennek oka többek között az, hogy a matematika alapozó tantárgy, és a hallgatóság még nem rendelkezik kellő tudással a speciális szakterületekről. Később, az egyes szaktárgyak tanulásakor/tanításakor ugyanez a nehézség fordítva is fennáll. A diákok többsége már csak felületesen emlékszik a matematikából tanultakra, emiatt az adott tudományterület által használt matematikai modellek végeredményei sok esetben levezetés nélkül memorizálandó képletekké válnak. Az itt bemutatásra kerülő egyszerű példák a matematika és fizika tananyag között próbálnak kapcsolatot teremteni. A harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete egy állandó együtthatós, másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet, melynek megoldása a rezgés kitérés-idő függvénye. Ismert, hogy a karakterisztikus egyenlet megoldásának három esete van: 2 valós szám, 1 valós szám vagy 2 komplex szám. Azt, hogy ezek közül melyik valósul meg, az ω körfrekvencia és a k csillapítási konstans egymáshoz való viszonya határozza meg.

2. Erősen csillapodó harmonikus rezgés

Erős csillapításról akkor beszélünk, ha a csillapítási konstans nagyobb, mint a körfrekvencia (azaz $k > \omega$). Ebben az esetben a karakterisztikus egyenlet megoldásai $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, különböző valós számok. Ilyenkor a differenciálegyenlet megoldásául kapott kitérés-idő függvény $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ alakú, amely $t \to \infty$ esetén nagyon gyorsan tart nullához. Oszcilláció nincs, a függvény alakja a kezdeti feltételektől függően háromféle lehet. Ezekről általánosan elmondható, hogy mindegyik legfeljebb egyszer vált előjelet (ld. későbbi feladatok), és mindegyik esetben erős csillapítást tapasztalunk. Az alábbiakban erre a három esetre található egy-egy egyszerű példa megoldással.

2.1. feladat. Egy harmonikus rezgőmozgást végző testre a közegellenállás csillapításként hat, amely a sebességgel arányos, és azzal ellentétes irányú. Ekkor a test mozgását leíró differenciálegyenlet: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) - k\dot{x}(t)$, ahol $x(t)$ a test kitérése az idő függvényében, az ω arányossági tényező a körfrekvencia, $k(> 0)$ pedig a csillapítási konstans. Legyen $\omega = 4\sqrt{2}\ \frac{1}{s}$, $k = 12\ \frac{Ns}{m}$, és a test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0 méter, a sebessége ugyanekkor 8 $\frac{m}{s}$. Határozzuk meg a test kitérését a $t = 1s$ időpillanatban! Mely időpillanatban következik be és mekkora a maximális kitérés?

Megoldás.
A differenciálegyenlet megoldása a karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározásával kezdődik (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$):

$$\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) + 32x(t) = 0,$$
$$\lambda^2 + 12\lambda + 32 = 0,$$
$$\lambda = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 32}}{2},$$

amelyből $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -8$. Tehát a karakterisztikus egyenlet megoldása két negatív valós szám, az általános megoldás pedig

$$x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-8t}, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A kapott függvényt deriváljuk:

$$\dot{x}(t) = -4C_1 e^{-4t} - 8C_2 e^{-8t}.$$

A kezdeti feltételek szerint $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = 8$, ezeket behelyettesítve az utóbbi két egyenletbe $C_1 = 2$ és $C_2 = -2$ adódik, a partikuláris megoldás pedig

$$x_p(t) = 2e^{-4t} - 2e^{-8t}.$$

Ebből meghatározható a test kitérése az indulástól számított 1 másodperc időpillanatban:

$$x_p(1) = 2e^{-4} - 2e^{-8} \approx 0{,}03596\ (m).$$

Látható, hogy a kitérés-idő függvény határértéke $t \to \infty$ esetén $\lim\limits_{t\to\infty}(2e^{-4t} - 2e^{-8t}) = 0$, azaz valóban lecsengő függvényről van szó. (A függvény határértékének fogalma sajnos nem tananyag, ezért részletesebb magyarázat szükséges.)

A feladatban kérdés az is, hogy mely időpillanatban következik be és mekkora a maximális kitérés. Az $x_p(t) = 2e^{-4t} - 2e^{-8t}$ függvény teljes diszkusszióját hallgatóink nem tudják elvégezni, mert nem minden lépése tananyag. A monotonitásvizsgálat, az esetleges lokális szélsőértékek, illetve a konvexitás, konkávság, és az esetleges inflexiós pontok meghatározása számukra is ismert eljárások és fogalmak, az ezekre vonatkozó számítások alább láthatók.

A monotonitást az első derivált segítségével vizsgáljuk.

$$\dot{x}_p(t) = -8e^{-4t} + 16e^{-8t},$$
$$-8e^{-4t} + 16e^{-8t} = 0,$$
$$e^{-4t} = \frac{1}{2},$$

ebből $t = \frac{1}{4} ln2 \approx 0{,}17\ (s)$, ami az alábbi táblázat alapján lokális maximumhely.

	$0 \leq t < \frac{1}{4} ln2$	$t = \frac{1}{4} ln2$	$\frac{1}{4} ln2 < t$
$\dot{x}_p(t)$	$+$	0	$-$
$x_p(t)$	$\uparrow$	lokális maximum	$\downarrow$

A függvény maximumának értéke

$$x_p\left(\frac{1}{4} ln2\right) = 2e^{-4\frac{1}{4}ln2} - 2e^{-8\frac{1}{4}ln2} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\ (m)\ .$$

Bár a feladatban nem kérdés, de tanulságos lehet a függvény konvexitásának és konkávságának vizsgálata. Erről a második derivált zérushelye ad információt:

$$\ddot{x}_p(t) = 32e^{-4t} - 128e^{-8t},$$
$$32e^{-4t} - 128e^{-8t} = 0 \qquad / : 32e^{-4t}(\neq 0),$$
$$e^{-4t} = \frac{1}{4},$$

ebből $t = \frac{1}{4} ln4 \approx 0{,}35\ (s)$, ami az alábbi táblázat alapján inflexiós pont.

	$0 \leq t < \frac{1}{4} ln4$	$t = \frac{1}{4} ln4$	$\frac{1}{4} ln4 < t$
$\ddot{x}_p(t)$	$-$	0	$+$
$x_p(t)$	konkáv	inflexiós pont	konvex

A függvény grafikonjának alakjával kapcsolatban fontosak a tengelymetszetek is.
Mivel a feladat szövegében adott volt, hogy a kitérés $t = 0\ s$ időpillanatban 0 méter, így a grafikon kezdőpontja az origó. Ezt a behelyettesítést akár a partikuláris megoldás ellenőrzésének is tekinthetjük:

$$x_p(0) = 2e^{-4\cdot 0} - 2e^{-8\cdot 0} = 2 - 2 = 0\ (m).$$

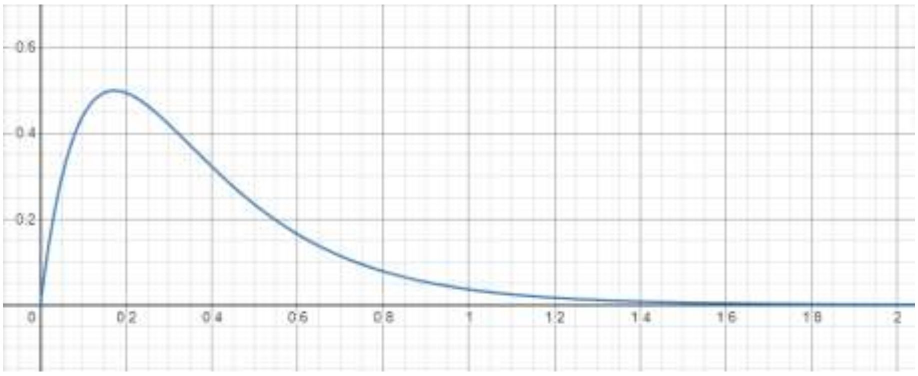
Van vajon a „t” tengelyen további tengelymetszet is? Az alábbi számítás mutatja, hogy nincs:

$$2e^{-4t} - 2e^{-8t} = 0$$

$$e^{-4t} - (e^{-4t})^2 = 0 \qquad /: e^{-4t} (\neq 0)$$
$$1 - e^{-4t} = 0$$
$$e^{-4t} = 1$$
$$t = 0\ (s)$$

Tehát a függvény nem vált előjelet, a kitérés iránya nem változik a rezgés során.

Az $x_p(t) = 2e^{-4t} - 2e^{-8t}$ függvény grafikonján jól láthatók az előbb számításokkal meghatározott eredmények (vízszintes tengely: idő (s), függőleges tengely: kitérés (m)).



Összegezve: A kitérés eleinte nő, majd elér egy maximumot, attól kezdve csökkenni kezd, majd közelíti a nullát. A függvény nem halad át a vízszintes tengelyen (nincs zérushelye), a kitérés végig pozitív irányú marad.

2.2. feladat. Az előző feladatot oldjuk meg ismét, de változtassunk a kezdeti feltételeken.

a) A test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0,5 méter, a sebessége ugyanekkor $-8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

b) A test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0,5 méter, a sebessége ugyanekkor $-2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Megoldás.

a) A 2.1. feladat általános megoldásából kiindulva:

$$x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-8t}, \text{ illetve}$$

$$\dot{x}(t) = -4C_1 e^{-4t} - 8C_2 e^{-8t}, \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A kezdeti feltételek szerint $x(0) = 0{,}5$ és $\dot{x}(0) = -8$, ezek visszahelyettesítésével a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{-8\cdot 0} &= 0{,}5 \\ -4C_1 e^{-4\cdot 0} - 8C_2 e^{-8\cdot 0} &= -8 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása $C_1 = -1$, $C_2 = 1{,}5$, a partikuláris megoldás pedig:

$$x_p(t) = -e^{-4t} + 1{,}5e^{-8t}.$$

Ebből meghatározható a test kitérése az indulástól számított 1 másodperc időpillanatban:

$$x_p(1) = -e^{-4} + 1{,}5e^{-8} \approx -0{,}01781\ (m),$$

ahol a negatív előjel a kezdeti kitéréssel ellentétes irányú kitérést mutatja.

A függvény a diszkussziójának egyes lépései a 2.1. feladathoz hasonlóan itt is elvégezhetők.

$$\dot{x}_p(t) = 4e^{-4t} - 12e^{-8t}$$
$$4e^{-4t} - 12e^{-8t} = 0$$
$$e^{-4t} = \frac{1}{3}$$

ebből $t = \frac{1}{4} ln3 \approx 0{,}27\ (s)$, ami az alábbi táblázat alapján lokális minimumhely.

	$0 \le t < \frac{1}{4} ln3$	$t = \frac{1}{4} ln3$	$\frac{1}{4} ln3 < t$
$\dot{x}_p(t)$	$-$	0	$+$
$x_p(t)$	↓	lokális minimum	↑

A függvény minimumának értéke

$$x_p\left(\frac{1}{4} ln3\right) = -4e^{-4\frac{1}{4}ln3} + 1{,}5e^{-8\frac{1}{4}ln3} = -4 \cdot \frac{1}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{1}{9} = -\frac{7}{6}\ (m)\ .$$

A második derivált vizsgálata:

$$\ddot{x}_p(t) = -16e^{-4t} + 96e^{-8t}$$
$$-16e^{-4t} + 96e^{-8t} = 0 \qquad /: (-16e^{-4t})(\neq 0),$$
$$e^{-4t} = \frac{1}{6}$$

Ebből $t = \frac{1}{4} ln6 \approx 0{,}45\ (s)$, ami az alábbi táblázat alapján inflexiós pont.

	$0 \le t < \frac{1}{4} ln6$	$t = \frac{1}{4} ln6$	$\frac{1}{4} ln6 < t$
$\ddot{x}_p(t)$	$+$	0	$-$
$x_p(t)$	konvex	inflexiós pont	konkáv

A tengelymetszetek vizsgálata:

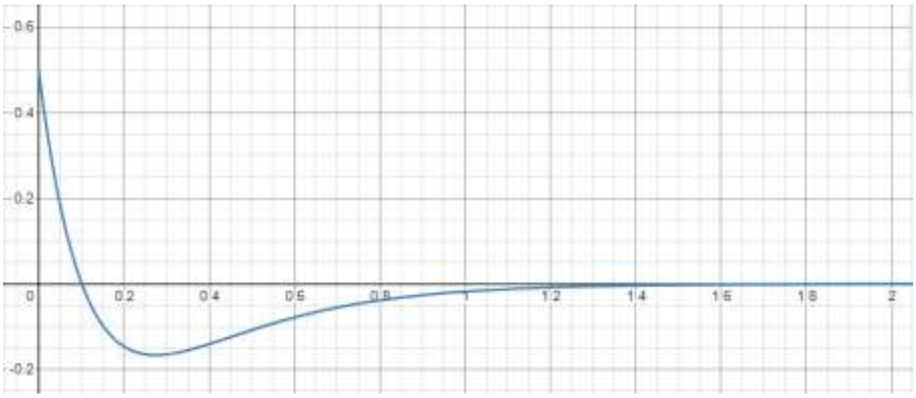
$$x_p(0) = -e^{-4\cdot 0} + 1{,}5e^{-8\cdot 0} = 0{,}5\ (m)\ ,$$

a függőleges tengely metszéspontjaként ezt az eredményt vártuk, hiszen ez volt a feladatban megadott kezdeti feltétel. A vízszintes tengelyen (idő tengely) a tengelymetszet:

$$-e^{-4t} + 1{,}5e^{-8t} = 0$$
$$-e^{-4t} + 1{,}5(e^{-4t})^2 = 0 \qquad /: e^{-4t}(\neq 0)$$
$$1 - 1{,}5e^{-4t} = 0$$

$$e^{-4t} = \frac{2}{3}$$
$$t = -\frac{1}{4} ln\frac{2}{3} = \frac{1}{4} ln\frac{3}{2} \approx 0{,}1\ (s)$$

A $x_p(t) = -e^{-4t} + 1{,}5e^{-8t}$ függvény grafikonján jól láthatók az előbb számolással meghatározott tulajdonságok (vízszintes tengely: idő (s), függőleges tengely: kitérés (m)).



Összegezve: A kitérés a mozgás elejétől kezdve folyamatosan csökken. A függvény $t \approx 0{,}1\ s$ időpillanatban áthalad a vízszintes tengelyen (vagyis van zérushelye, azaz van olyan időpillanat, ahol a kitérés nulla). Ezt követően a negatív irányú kitérés növekszik, majd elér egy maximumot (ez a függvény abszolút minimuma), majd a negatív értékek felől közelít nullához.

b) Ismét a 2.1. feladat általános megoldásából indulunk ki, a kezdeti feltételekből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} C_1e^{-4\cdot 0} + C_2e^{-8\cdot 0} &= 0{,}5 \\ -4C_1e^{-4\cdot 0} - 8C_2e^{-8\cdot 0} &= -2{,}5 \end{aligned}\right\}$$

Ebből $C_1 = \frac{3}{8}$, $C_2 = \frac{1}{8}$ és a partikuláris megoldás:

$$x_p(t) = \frac{3}{8}e^{-4t} + \frac{1}{8}e^{-8t}.$$

Ebből meghatározható a test kitérése az indulástól számított 1 másodperc időpillanatban:

$$x_p(1) = \frac{3}{8}e^{-4} + \frac{1}{8}e^{-8} \approx 0{,}00691\ (m).$$

A függőleges tengelyen a tengelymetszet nyilván a feladatban megadott egyik kezdeti feltétel lesz:

$$x_p(0) = \frac{3}{8}e^{-4\cdot 0} + \frac{1}{8}e^{-8\cdot 0} = 0{,}5\ (m)\ .$$

A vízszintes tengelyen (idő tengely) nincs tengelymetszet, ugyanis minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $e^{-4t} > 0$ és $e^{-8t} > 0$, azaz

$$\frac{3}{8}e^{-4t} + \frac{1}{8}e^{-8t} > 0\ .$$

Az $\dot{x}_p(t)$ függvény (ugyancsak az előjelekről tett előbbi megállapítások miatt) minden t időpillanatban negatív értéket vesz fel:

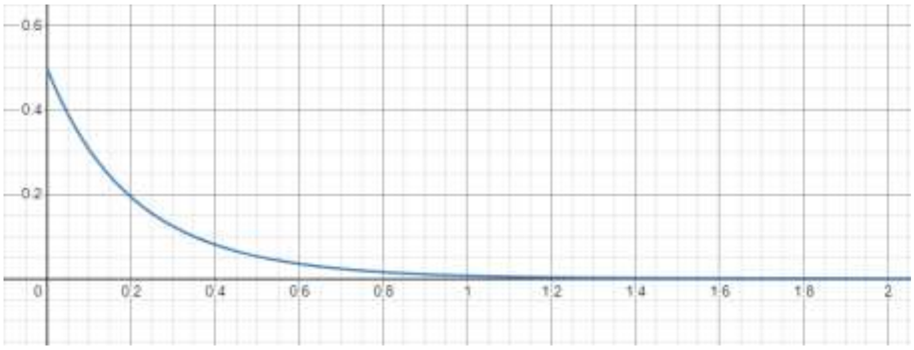
$$\dot{x}_p(t) = -\frac{3}{2}e^{-4t} - e^{-8t},$$

tehát az $x_p(t)$ függvény a teljes értelmezési tartományán szigorúan monoton csökken. Mivel $t \in [0, \infty[$, így a függvénynek $t = 0$ –ban abszolút maximuma van (ez a $t = 0$ értékhez tartozó 0,5 méteres kitérés). A második derivált

$$\ddot{x}_p(t) = 6e^{-4t} + 8e^{-8t},$$

amely minden t időpillanatban pozitív értéket vesz fel, tehát az $x_p(t)$ függvény a teljes értelmezési tartományán konvex.

A $x_p(t) = \frac{3}{8}e^{-4t} + \frac{1}{8}e^{-8t}$ függvény grafikonjáról leolvashatók az előbb számolással meghatározott tulajdonságok (vízszintes tengely: idő (s), függőleges tengely: kitérés (m)).



Összegezve: A függvény maximuma a kiindulási kitérés érték. A függvénynek nincs zérushelye, a pozitív értékek felől közeledik a zérus kitéréshez.

3. Gyengén csillapodó harmonikus rezgés

Gyenge csillapításról akkor beszélünk, ha a közegellenállásnak kisebb (de nem elhanyagolható) a jelentősége. Ilyenkor $k < \omega$, és a karakterisztikus egyenlet megoldása egy komplex konjugált számpár (azaz $\lambda_{1,2} = \propto \pm \beta i$, ahol i az imaginárius egység). Ebben az esetben matematikai szempontból az $x(t) = e^{\alpha t}(C_1 sin\beta t + C_2 cos\beta t)$ alakú általános megoldás a szokványos. Itt most csak annak az esetnek a tárgyalására szorítkozunk, amikor a $t = 0$ s időpillanatban nem volt kitérés. Ellenkező esetben a képlet tovább bonyolódik, a szögfüggvények argumentumához egy újabb tag, az ún. fáziseltolódás is hozzáadódik. Ugyanez a megszorítás eredményezi azt is, hogy a $C_2 = 0$ (ahogy ezt az alábbiakban látni fogjuk). Emiatt a kitérés-idő függvény az

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} sin\beta t$$

alakra egyszerűsödik. Ennek a függvénynek a képe egy olyan „szinusz függvény”, amelynek kitérése $t \to \infty$ esetén exponenciálisan csökken, illetve közben a rezgés frekvenciája is csökken (a szinusz függvények hullámai „egyre jobban összenyomódnak”). Tehát $t \to \infty$ esetén a kitérés is lassan nullához tart, a rezgés elhal.

3.1. feladat. Egy harmonikus rezgőmozgást végző testre a közegellenállás csillapításként hat, amely a sebességgel arányos, és azzal ellentétes irányú. Ekkor a test mozgását leíró differenciálegyenlet: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) - k\dot{x}(t)$, ahol $x(t)$ a test kitérése az idő függvényében. A körfrekvencia $\omega = \sqrt{6{,}5}\ \frac{1}{s}$, a közegellenállásból származó csillapítási konstans $k = 1\ \frac{Ns}{m}$. A test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0 méter, a sebessége ugyanekkor $5\ \frac{m}{s}$. Adjuk meg a test kitérését az idő függvényében! Határozzuk meg a test kitérését a $t = 1s$ időpillanatban!

Megoldás.
A differenciálegyenlet megoldása során a karakterisztikus egyenlet, illetve annak gyökei (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$):

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 6{,}5x(t) = 0,$$
$$\lambda^2 + \lambda + 6{,}5 = 0,$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6{,}5}}{2},$$

azaz $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}i$, az általános megoldás pedig

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 sin\frac{5}{2}t + C_2 cos\frac{5}{2}t\right), \text{ ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A kezdeti feltételek visszahelyettesítésével a C_1 és C_2 konstansok meghatározhatók. Adott volt, hogy $x(0) = 0$, azaz

$$e^0(C_1 sin0 + C_2 cos0) = 0,$$

ebből $C_2 = 0$. Emiatt az általános megoldás erre az alakra egyszerűsödik:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} sin\frac{5}{2}t, \text{ ahol } C_1 \in \mathbb{R}.$$

A másik kezdeti feltétel szerint $\dot{x}(0) = 5$, ehhez deriváljuk az előbbi függvényt:

$$\dot{x}(t) = C_1\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} sin\frac{5}{2}t + \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}t} cos\frac{5}{2}t\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \cdot C_1 \cdot \left(sin\frac{5}{2}t - 5cos\frac{5}{2}t\right).$$

Behelyettesítve a $t = 0$ értéket:

$$\dot{x}(0) = -\frac{1}{2}e^0 \cdot C_1 \cdot (0 - 5) = \frac{5}{2}C_1,$$
$$\frac{5}{2}C_1 = 5,$$

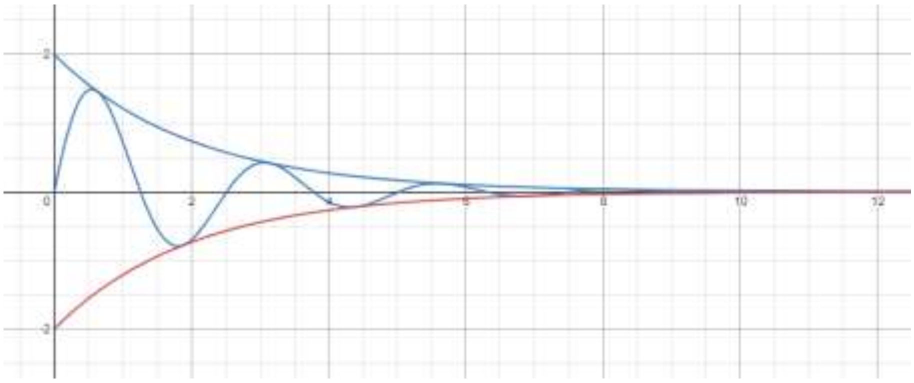
ebből $C_1 = 2$. Tehát a kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldás:

$$x_p(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t} sin\frac{5}{2}t.$$

A test kitérése az indulástól számított 1 másodperc időpillanatban

$$x_p(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} \cdot sin\frac{5}{2} = 2e^{-\frac{1}{2}} \cdot sin143{,}24° \approx 0{,}726\ (m).$$

Az $x_p(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t} sin\frac{5}{2}t$ függvény elemzését bonyolultsága miatt csak a grafikonjából kiindulva végezzük el (vízszintes tengely: idő (s), függőleges tengely: kitérés (m)).



A függvény képe egy olyan „szinusz függvény”, amelynek a kitérése az $2e^{-\frac{1}{2}t}$ és $-2e^{-\frac{1}{2}t}$ burkológörbék által meghatározott ütemben exponenciálisan csökken. Összességében az $x_p(t)$ függvény $t \to \infty$ esetén lassan tart nullához, vagyis a rezgés fokozatosan elhal.

4. Összefoglalás

A felsőbb matematika oktatása során hallgatóink − tájékozatlanságuk miatt − gyakran megkérdőjelezik az adott eljárás mérnöki gyakorlatban való alkalmazhatóságát. Elfogadható indoklás nélkül sokan kétségbe vonják a témakör szükségességét. A differenciálegyenletek is olyan fejezet, amelyet bár rengeteg tudományterületen használnak, többnyire csak körülírni, felvázolni tudjuk az alkalmazhatóság lehetőségeit, ugyanis további (fizikai, kémiai, stb.) ismeretekre lenne szükség ahhoz, hogy konkrét példákat adjunk. Fizika tantárgyból a rezgések mozgásegyenleteit a legtöbb felsőoktatási intézményben csak érintőlegesen tárgyalják, leginkább azért, mert a hallgatók matematikai háttértudása hiányos, vagy addigra már nem naprakész. A fenti egyszerű feladat-ötletekkel próbáltam a matematika és fizika tananyag közötti “szakadékot” áthidalni, és a témakör fontosságára rávilágítani.

Irodalomjegyzék

[1] **Budó Ágoston**, Kísérleti fizika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
[2] **Budó Ágoston**, Mechanika. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.
[3] **Scharnitzky Viktor**, Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.
[4] **Pontrjagin, L. Sz.**, Közönséges differenciálegyenletek. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
[5] **Ponomarjov, K. K.**, Differenciálegyenletek felállítása és megoldása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.

.