

Áttekintés a hiperbolikus Pascal tetraéderekről

Németh László

Soproni Egyetem

Informatikai és Matematikai Intézet

nemeth.laszlo@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A binomiális együtthatók háromszög alakban való elrendezése, az ún. Pascal háromszög a matematika számos területén ismert és használt. Ennek magasabb dimenziós változatainak az ún. Pascal tetraédernek és szimplexnek a 3- és 4-dimenziós hiperbolikus, valamint egy érdekes $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ térbeli változatát mutatjuk be összefoglaló formában. Meghatározzuk a szintről szintre való növekedéseket leíró rekurziókat.

ABSTRACT. Pascal's triangle is a triangular arrangement of the binomial coefficients, which is well-known and used in several fields of mathematics. In our review we introduce its special higher dimensional generalizations, the so-called Pascal tetrahedron, the Pascal simplex, and an interesting version of the tetrahedron in the space $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$. We give the growths of layers by layers with recurrence relations.

1. Bevezetés

A binomiális együtthatók háromszög alakban való elrendezése már az ókori Indiában, Perzsiában és később Kínában is ismert volt. Az újkori matematikában Blaise Pascal volt az első, aki összefoglalta az addigi ismereteket erről az aritmetikai háromszögről [21]. Azóta a matematikának csaknem az összes területén használt, Pascalról elnevezett háromszögnek a kutatók számos érdekes és hasznos tulajdonságát fedezték fel és nagy számú általánosítást adták meg (lásd [19] irodalomjegyzéke). Németh és Szalay [19]-ben összefoglaló jelleggel egy újabb típusú általánosítást, az ún. hiperbolikus Pascal háromszögeket [2] mutatta be, amelyről egy rövid angol nyelvű áttekintés található a [3] összefoglalóban. További tulajdonságok a [2, 12, 16–18] tudományos munkákban részletesen megtalálhatók.

A jelenlegi publikáció célja, hogy [19] folytatásaként a hiperbolikus Pascal háromszögek magasabb dimenziós általánosításait és ezek ismert tulajdonságaikról összefoglaljuk. A következő három fejezetben általánosítjuk definíciónkat 3- és 4-dimenziós hiperbolikus térben egy kocka és egy szimplex mozaikra, így kapjuk a hiperbolikus Pascal tetraédert (más néven a hiperbolikus Pascal piramist) és a hiperbolikus Pascal szimplexet [11, 13]. Vizsgáljuk ezen aritmetikai objektumok legfontosabb tulajdonságait. Továbbá a $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ térben, ami egyike az ún. 3-dimenziós Thurston geometriáknak és a \mathbf{H}^2 hiperbolikus sík és az \mathbf{R} valós egyenes direkt szorzataként ismert, szintén definiálunk egy Pascal tetraéder osztályt a tér kocka mozaikjain, aminek a legfontosabb tulajdonságait is bemutatjuk [14].

KULCSSZAVAK. Hiperbolikus Pascal tetraéder, hiperbolikus tér, rekurzív sorozatok.

KEYWORDS. Hyperbolic Pascal tetrahedron, hyperbolic space, recursive sequences.

2. Hiperbolikus Pascal tetraéder

A Pascal háromszög 3-dimenziós analógja a Pascal tetraéder, amelyet Pascal piramisnak is neveznek (a 2. ábrának a bal oldali részábrája). Itt a szintek háromszögek, az n . szint oldalai megegyeznek a Pascal háromszög n . soraival és minden belső szám egyenlő a megelőző szinten közvetlenül "fölötte" levő három szám összegével [1, 4, 6, 7].

A 3-dimenziós térben egy szabályos mozaikot a $\{p, q, r\}$ Schläfli szimbólummal szokás jelölni, ahol $\{p, q\}$ jelöli a cella típusát, $\{q, r\}$ pedig a csúcsalakzat típusát (mindkettő gömbi szabályos mozaiknak is tekinthető). Az euklideszi térben csak egy szabályos mozaik létezik, amely a jól ismert $\{4,3,4\}$ kockamozaik. Ellenben a hiperbolikus térben már 15 különböző szabályos mozaikot különböztetünk meg, melyek közül csak 4 korlátos tartományú és csak egynek, a $\{4,3,5\}$ -nek, a cellái kockák (néhány további részlet [5, 15, 25]-ben).

A következőkben a síkbeli hiperbolikus Pascal háromszögek mintájára definiáljuk a hiperbolikus Pascal tetraédert, amelyet a hiperbolikus tér egyetlen $\{4,3,5\}$ kockamozaikjára alapozunk.

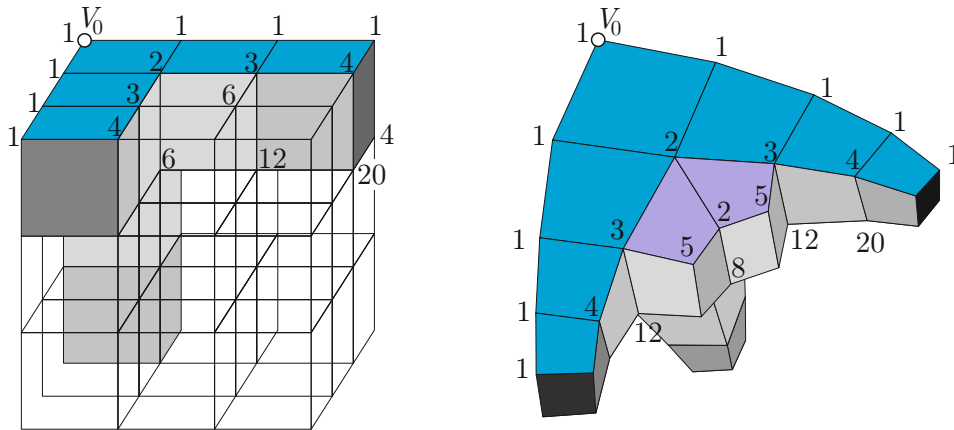
Először is foglaljuk össze az euklideszi $\{4,3,4\}$ és a hiperbolikus $\{4,3,5\}$ kockamozaik legfontosabb tulajdonságait. Mindkettőt $\{4,3\}$ kockák alkotják, az euklideszi esetben a csúcsalakzat a $\{3,4\}$ oktaéder, míg a hiperbolikusban a $\{3,5\}$ ikozaéder. (A csúcsalakzatot egy tetszőleges csúcsponthoz legközelebb lévő csúcspontok alkotják.) A kockák száma egy tetszőleges csúcs körül megegyezik a csúcsalakzat lapjainak számával, azaz 8-cal, illetve 20-szal. Ha a mozaikot rácsként vagy végtelen gráfként tekintjük, akkor bármely csúcs fokszáma a csúcsalakzat csúcsainak száma, azaz 6, illetve 12. Minden mozaikélt 4, illetve 5 kocka vesz körül.

Most definiáljuk a \mathcal{P} részmozaikot, ami tartalmazni fogja a hiperbolikus Pascal tetraédert. Tekintsünk egy kockát a hiperbolikus $\{4,3,5\}$ mozaikból, mint a \mathcal{P} alapcelláját és legyen V_0 az egyik csúcsa. Vegyünk három kockát a mozaikból, melyeknek közös egy-egy lapja az alapkockával, de nem tartalmazzák a V_0 csúcspontot. (Az 1. ábra mutatja a konstrukciót mindkét esetben.) Tükrözzük ezeket a kockákat az alapkockával közös lapjukkal ellentétes lapjukra, majd újra és újra határtalanul tükrözzük őket az ellentétes lapjukra. Ily módon megkapjuk a \mathcal{P} határának "éleit" (az 1. ábrán kék – nyomtatásban sötétszürke – kockák). Végül legyen e határok által meghatározott legszűkebb konvex részmozaik a \mathcal{P} , melynek alakja hasonlít egy végtelen tetraéderhez. (Euklideszi esetben \mathcal{P} egy tércsoport.)

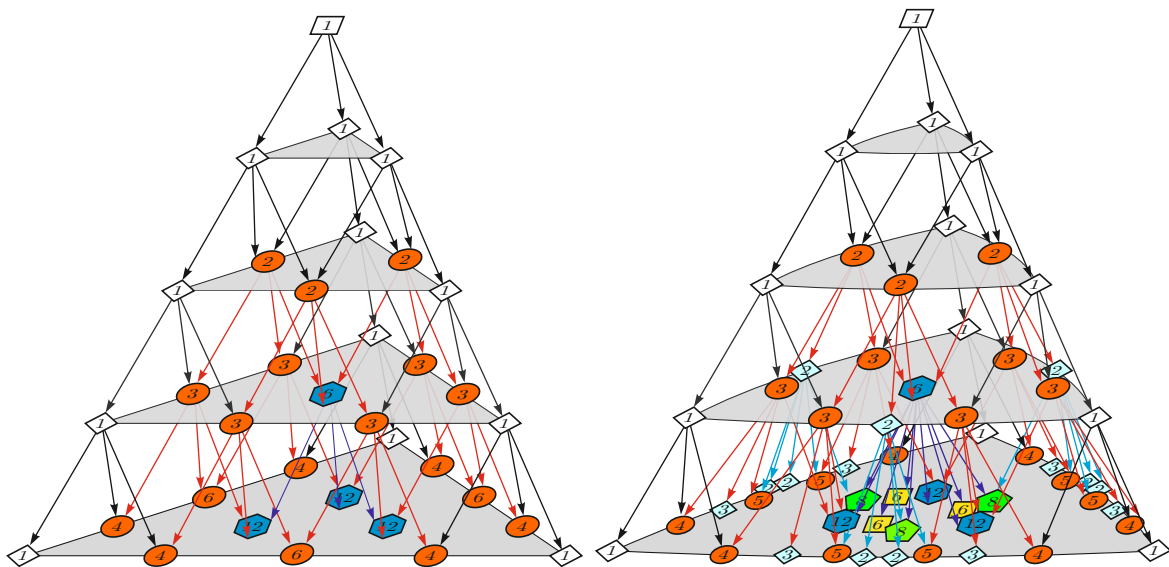
Legyen $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ az a gráf, amelynek csúcsai és élei megegyeznek a \mathcal{P} -hez tartozó mozaik-csúcspontokkal, illetve mozaik-élekkel. Irányítsuk $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ éleit a V_0 csúcsból kiindulva és tőle távolodva. A gráf egy tetszőleges V csúcsához rendeljük hozzá azt a számot, amely a legrövidebb utak számát adja V_0 -tól V -ig \mathcal{P} élei mentén. (Néhány csúcshoz rendelt szám is látható az 1. ábrán.) Az így kapott $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ gráfot nevezzük Pascal tetraédernek (vagy Pascal piramisnak), hiperbolikus esetben hiperbolikus Pascal tetraédernek (vagy hiperbolikus Pascal piramisnak), melyet a továbbiakban $\mathcal{HP}\mathcal{P}$ -vel jelölünk.

Legyen a Pascal tetraéder 0. szintje a V_0 pont, az n . szint álljon azokból a csúcspontokból, amelyek pontosan n éltávolságra (a legrövidebb utakhoz tartozó élek száma) vannak V_0 -tól. A 2. ábrán balról az euklideszi és jobbról a hiperbolikus Pascal tetraéder első néhány szintje látható.

A hiperbolikus Pascal tetraéder csúcspontjait különböző típusokba sorolhatjuk. Mivel a $\mathcal{HP}\mathcal{P}$ minden lapja $\mathcal{HPT}_{4,5}$ lesz, ezért a lapokon A , B és 1 típusú pontok vannak. Mivel egy kockának minden csúcsában három él van, ezért a $\mathcal{HP}\mathcal{P}$ növekedése során (lépkedés az $(i - 1)$. szintről az i . szintre) egy tetszőleges i . szinten levő V belső csúcspontot az $(i - 1)$. szintről három, kettő vagy egy éllel lehet elérni. Ez alapján legyen az i . szint egy belső csúcspontja C , D vagy E típusú, ha három, kettő vagy csak egy éllel kapcsolódik az $(i - 1)$. szinthez.

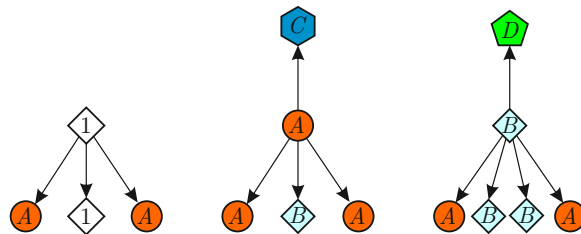


1. ábra. \mathcal{P} euklideszi és hiperbolikus konstrukciója



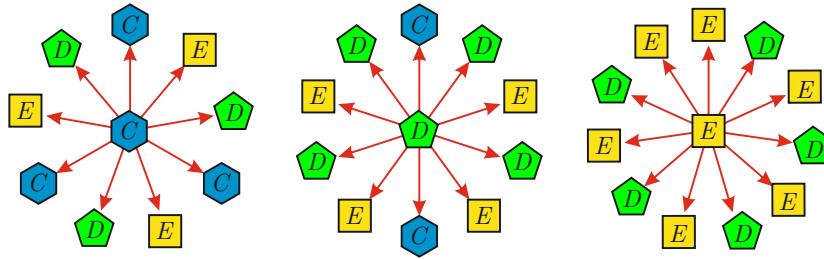
2. ábra. Euklideszi és hiperbolikus Pascal tetraéder

A \mathcal{HPP} növekedési algoritmusának meghatározásához a csúcsponthoz tartozó csúcsalakzatokat (melyek ikozaéderek) kell megvizsgálni minden típusú pont esetén. Ezeknek az egyszerűsített változatai láthatók a 3. és a 4. ábrákon (bővebben [11]).



3. ábra. Növekedési módszer a \mathcal{HPP} lapjainál

Legyen az n . szinten levő A , B , C , D és E típusú pontok száma a_n , b_n , c_n , d_n és e_n . Ekkor a 3. és a 4. ábrák felhasználásával a következő tételt (1. Tételt) kapjuk. Például a (1) egyenletrendszer harmadik egyenlete a következőképpen adódik. Minden A típusú ponthoz egy új, a következő szinten levő C típusú pont tartozik (3. ábra). Ez az érték a C és D típusú pontok esetén három, illetve kettő (4. ábra). Mivel minden egyes új C típusú pont három előző szinten

4. ábra. Növekedési módszer a \mathcal{HPP} belsejében

lévő ponthoz is tartozik, ezért a kapott értékeket el kell osztanunk hárommal, a multiplicitás elkerülése végett. A többi típusú ponthoz nem tartozik új C pont.

1. Tétel. [11]. A különböző típusú csúcspontok számának növekedését az

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= a_n + b_n + 3, \\
 b_{n+1} &= a_n + 2b_n, \\
 c_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + c_n + \frac{2}{3}d_n, \\
 d_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}c_n + 2d_n + \frac{5}{2}e_n, \\
 e_{n+1} &= 3c_n + 4d_n + 6e_n
 \end{aligned} \tag{1}$$

lineáris inhomogén egyenletrendszer adja meg ($n \geq 1$), ahol a kezdőelemek ($n = 1$) mind zérók.

Jelöljük az n . szinten levő összes csúcspont számát s_n -nel, ekkor $s_0 = 1$ és

$$s_n = a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + 3 \quad (n \geq 1).$$

2. Tétel. [11]. Az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $\{e_n\}$ és $\{s_n\}$ sorozatokat mind ugyanazzal az ötödrendű rekurzióval adhatjuk meg, amely

$$x_n = 12x_{n-1} - 37x_{n-2} + 37x_{n-3} - 12x_{n-4} + x_{n-5} \quad (n \geq 6).$$

A rekurzív sorozatok kezdőelemeit az 1. táblázat tartalmazza. Továbbá az $\{a_n\}$ és a $\{b_n\}$ sorozat másodrendű rekurzióval is megadható:

$$x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} + x_{n-3} \quad (n \geq 4).$$

A sorozatok explicit formulái:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(-\frac{9}{2} + \frac{21}{10}\sqrt{5}\right) \alpha_1^n + \left(-\frac{9}{2} - \frac{21}{10}\sqrt{5}\right) \alpha_2^n + 3, \\
 b_n &= \left(3 - \frac{6}{5}\sqrt{5}\right) \alpha_1^n + \left(3 + \frac{6}{5}\sqrt{5}\right) \alpha_2^n - 3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_n &= \left(-\frac{33}{10} + \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)\alpha_1^n + \left(-\frac{33}{10} - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)\alpha_2^n + \left(\frac{122}{15} - \frac{21}{10}\sqrt{15}\right)\alpha_3^n \\
 &\quad + \left(\frac{122}{15} + \frac{21}{10}\sqrt{15}\right)\alpha_4^n + \frac{1}{3}, \\
 d_n &= \left(\frac{27}{5} - \frac{12}{5}\sqrt{5}\right)\alpha_1^n + \left(\frac{27}{5} + \frac{12}{5}\sqrt{5}\right)\alpha_2^n + \left(-\frac{213}{20} + \frac{11}{4}\sqrt{15}\right)\alpha_3^n \\
 &\quad + \left(-\frac{213}{20} - \frac{11}{4}\sqrt{15}\right)\alpha_4^n - \frac{3}{2}, \\
 e_n &= \left(-\frac{21}{10} + \frac{9}{10}\sqrt{5}\right)\alpha_1^n + \left(-\frac{21}{10} - \frac{9}{10}\sqrt{5}\right)\alpha_2^n + \left(\frac{31}{10} - \frac{4}{5}\sqrt{15}\right)\alpha_3^n \\
 &\quad + \left(\frac{31}{10} + \frac{4}{5}\sqrt{15}\right)\alpha_4^n + 1, \\
 s_n &= \left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{10}\sqrt{5}\right)\alpha_1^n + \left(-\frac{3}{2} - \frac{9}{10}\sqrt{5}\right)\alpha_2^n + \left(\frac{7}{12} - \frac{3}{20}\sqrt{15}\right)\alpha_3^n \\
 &\quad + \left(\frac{7}{12} + \frac{3}{20}\sqrt{15}\right)\alpha_4^n + \frac{17}{6},
 \end{aligned}$$

ahol $\alpha_1 = (3 + \sqrt{5})/2$, $\alpha_2 = (3 - \sqrt{5})/2$, $\alpha_3 = 4 + \sqrt{15}$ és $\alpha_4 = 4 - \sqrt{15}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	0	3	6	12	27	66	168	435	1134	2964
b_n	0	0	0	3	12	36	99	264	696	1827	4788
c_n	0	0	0	1	3	9	34	174	1128	8251	63315
d_n	0	0	0	0	3	24	177	1347	10467	82029	644808
e_n	0	0	0	0	3	39	357	2952	23622	186984	1474773
s_n	1	3	6	13	36	138	736	4908	36351	280228	2190651

1. táblázat. A különböző típusú csúcspontok száma ($n \leq 10$)

Jelölje \hat{a}_n , \hat{b}_n , \hat{c}_n , \hat{d}_n és \hat{e}_n az n . szinten levő A , B , C , D és E típusú pontok értékeinek összegét és legyen a szint összes értékének az összege \hat{s}_n . Ekkor a következő 3. tétel adja meg a rekurzív összefüggést az egyes sorozatok esetén. (A 2. tételhez hasonló, sokkal összetettebb állítást is megfogalmazhatunk, amely [11]-ben megtalálható.)

3. Tétel. [11]. Az $\{\hat{a}_n\}$, $\{\hat{b}_n\}$, $\{\hat{c}_n\}$, $\{\hat{d}_n\}$, $\{\hat{e}_n\}$ és $\{\hat{s}_n\}$ sorozatokat egy közös hatodrendű rekurzióval írhatjuk le, amely az

$$\hat{x}_n = 18\hat{x}_{n-1} - 99\hat{x}_{n-2} + 226\hat{x}_{n-3} - 224\hat{x}_{n-4} + 92\hat{x}_{n-5} - 12\hat{x}_{n-6} \quad (n \geq 7),$$

lineáris homogén rekurzió.

A két utóbbi tétel bizonyítása azon alapszik, hogy a megadott rekurzív egyenletrendszernek meghatározzuk az együttható mátrixait, majd ezeknek a mátrixoknak a karakterisztikus egyenleteit kiszámoljuk, amelyek az egyes sorozatoknak is a karakterisztikus egyenletei lesznek. Némely sorozat esetén speciálisan lehet csökkenteni a rekurzió rendjét.

3. Hiperbolikus Pascal szimplex

A 4-dimenziós térben a hiperkocka a természetes általánosítása a négyzetnek és a kockának. Coxeter [5]-ben megmutatta, hogy a hiperkockákkal is lehet szabályos mozaikot képezni, nem csak az euklideszi, hanem a hiperbolikus térben is. Ezek a $\{4,3,3,4\}$ és a $\{4,3,3,5\}$ mozaikok. A Pascal háromszög 4-dimenziós változata a Pascal szimplex, amely az euklideszi esetben a $\{4,3,3,4\}$ mozaikra, míg a hiperbolikus térben a $\{4,3,3,5\}$ mozaikra alapozható.

A $\{4,3,3,5\}$ hiperbolikus mozaik minden cellája a $\{4,3,3\}$ hiperkocka, a csúcsalakzata pedig a $\{3,3,5\}$ szimbólummal jelölt 600-cella. (Mindkét szabályos politóp tekinthető egy 4-dimenziós gömb 3-dimenziós felületén levő 3-dimenziós gömbi mozaiknak.) A hiperkocka jól ismert, ellenben a 600-cella nem annyira, ezért nézzük át a legfontosabb jellemzőit. A 3-dimenziós lapjai, cellái, a $\{3,3\}$ tetraéderek, a (2-dimenziós) lapjai szabályos háromszögek és az egy csúcshoz legközelebbi csúcsai egy $\{3,5\}$ ikozaédert formálnak, tehát minden csúcson 12 élre, 30 lapra és 20 cellára illeszkedik. Minden él 5 lapnak és 5 cellának, valamint minden lap 2 cellának eleme. A 600-cella csúcsainak, éleinek, lapjainak és celláinak száma rendre 120, 720, 1200 és 600. További részletek a 600-cella szerkezetéről [23]-ban található.

Tekintve a $\{4,3,3,5\}$ mozaiknak egy tetszőleges V csúcspontját, kapjuk, hogy a V -t körülvevő hiperkockák száma 600. Továbbá egy mozaik élt 20 hiperkocka fog közre. (A mozaikról néhány további tulajdonság, például [5, 10, 15]-ben található.)

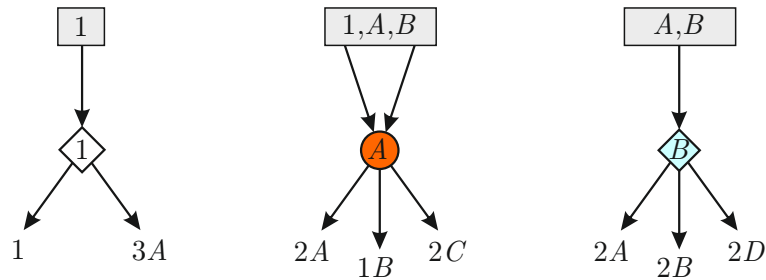
A 4-dimenziós hiperbolikus Pascal szimplex (\mathcal{HPS}) definíciója, legfontosabb tulajdonságainak meghatározása teljesen azonos módon tárgyalható, mint ahogyan a hiperbolikus Pascal tetraéder esetén tettük [11].

Tekintsünk a mozaiknak egy tetszőleges csúcspontját, legyen ez V_0 , mely egyben a \mathcal{HPS} kezdő csúcspontja is lesz. Jelöljük ezt a csúcspontot 1-gyel, továbbá a mozaik minden egyes csúcspontját jelöljük azzal a számmal, ami a mozaik élek menti legrövidebb utak számát adja a tekintett pont és a kezdőpont között. A legrövidebb utak a V_0 pontból kiinduló irányított gráfot adják. Defináljuk egy konvex \mathcal{P} részét a mozaiknak a következőképpen. Először tekintsünk egy hiperkockát, aminek egyik csúcsa V_0 és legyen a V_0 -lal ellentétes csúcsa V_1 . A hiperkocka csúcsai közül ehhez a csúcsponthoz van hozzárendelve a legnagyobb szám, ami 24. Másodszor vegyük a további hiperkockákat a mozaiknak, amelyeknek még csúcspontja a V_1 . Most tekintsük az újonnan vett hiperkockák azon csúcspontjait, amelyek legtávolabb vannak V_0 -tól (ezekhez van hozzárendelve a legnagyobb számok az eddig tekintett hiperkockák csúcspontjai közül) és jelöljük ezeket V_2 -vel, majd rakjuk körbe őket a mozaik hiperkockáival. Ezután rakjuk körbe újra a legnagyobb értékű csúcspontokat hiperkockákkal, és folytassuk így tovább az algoritmust határtalanul. Majd az így kapott hiperkockákat tartalmazó legszűkebb konvex részmozaikot tekintjük \mathcal{P} -nek. Végül \mathcal{P} mozaikrész V_0 -tól való éltávolság alapján számozott csúcsai és irányított élei adnak egy V_0 kezdőpontú, egy végtelen szimplexhez hasonló irányított gráfot, amit hiperbolikus Pascal szimplexnek (\mathcal{HPS}) nevezünk. Nyilvánvalóan, a kezdőelemtől eltekintve, egy tetszőleges csúcshoz tartozó szám, a bejövő élek kezdőpontjaihoz rendelt számok összege.

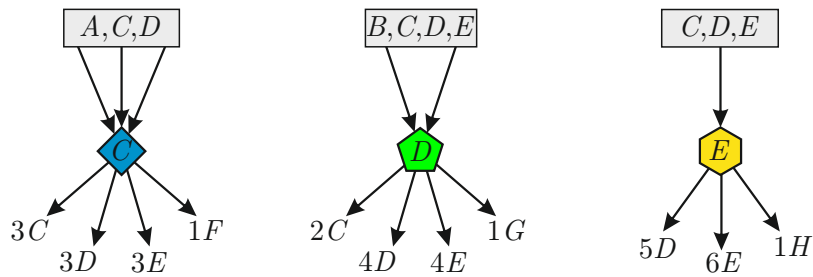
A hiperbolikus Pascal szimplex n . szintje álljon azokból a csúcspontokból amelyek pontosan n él távolságra vannak a V_0 csúcsponttól (a legrövidebb út hossza V_0 -tól éppen n). Ekkor V_0 a 0. szint. A 0. szinttől tekintve minden szint tetraéder alakot vesz fel. A \mathcal{HPS} 3-dimenziós oldallapjai hiperbolikus Pascal tetraéderek (\mathcal{HPP}) és ezeknek a 2-dimenziós oldallapjai pedig hiperbolikus Pascal háromszögek ($\mathcal{HPT}_{4,5}$). Az n . szint lapjai és élei rendre megegyeznek a \mathcal{HPP} n . szintjével és a $\mathcal{HPT}_{4,5}$ n . sorával.

A hiperbolikus Pascal szimplex minden elemét a bejövő és kimenő élei alapján csoportosíthatjuk. Mivel minden hiperlapja \mathcal{HPP} , ezért a rajta lévő csúcspontok típusai legyenek 1, A , B , C , D , illetve E , ahogyan ezt már korábban definiáltuk. Általánosan, a \mathcal{HPS} belsejében minden

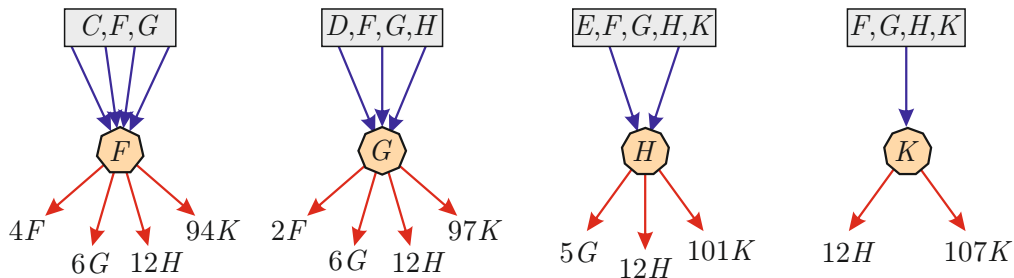
csúcsnak négy, három, kettő vagy egy bejövő éle van, jelöljük ezeket rendre F , G , H , illetve K típusúval. Minden típusú csúcs esetén a kimenő éleken levő, új, következő szinten lévő típusú pontok meghatározásához a típusokhoz tartozó csúcsalakzatokat (melyek 600-cellák) kell megvizsgálni. Az eredményeket az 5., a 6. és a 7. ábrák foglalják össze. Az egyes típusok jelei előtti számok azt mutatják, hogy abból a típusú csúcspontból hány darab van. A kétdimenziós lapokon lévő csúcspontok esetén a bejövő és a kimenő élek száma összesen 7 (az szimplex éleinél csak 5), míg a háromdimenziós lapok belsejében lévő csúcspontok esetén 13. A \mathcal{HPP} belső pontja esetén ez a szám 120.



5. ábra. A 2-dimenziós lapok növekedése a \mathcal{HPS} -ben



6. ábra. A 3-dimenziós lapok növekedése a \mathcal{HPS} -ben



7. ábra. Növekedés a \mathcal{HPS} belsejében

Jelölje rendre $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n, k_n$ és v_n az n . szinten levő $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ és 1 típusú pontok számát, valamint s_n a szint összes csúcspontját. Ekkor a következő tételek igazak a sorozatokra.

4. Tétel. [13]. *A hiperbolikus Pascal szimplex különböző típusú pontjainak számát meghatározó sorozatok a következő lineáris homogén rekurzív egyenletrendszerrel adhatók meg ($n \geq 1$),*

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= \frac{1}{2}(2a_n + 2b_n + 3v_n), \\
 b_{n+1} &= a_n + 2b_n, \\
 c_{n+1} &= \frac{1}{3}(2a_n + 3c_n + 2d_n), \\
 d_{n+1} &= \frac{1}{2}(2b_n + 3c_n + 4d_n + 5e_n), \\
 e_{n+1} &= 3c_n + 4d_n + 6e_n, \\
 f_{n+1} &= \frac{1}{4}(c_n + 4f_n + 2g_n), \\
 g_{n+1} &= \frac{1}{3}(d_n + 6f_n + 6g_n + 5h_n), \\
 h_{n+1} &= \frac{1}{2}(e_n + 12f_n + 12g_n + 12h_n + 12k_n), \\
 k_{n+1} &= 94f_n + 97g_n + 101h_n + 107k_n \\
 v_{n+1} &= v_n,
 \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $v_1 = 4$ és a többi kezdőelem zéró.

5. Tétel. [13]. *Az $\{a_n\}, \dots, \{k_n\}$ és $\{s_n\}$ sorozatok mindegyike az*

$$\begin{aligned}
 x_n &= 128x_{n-1} - 1795x_{n-2} + 8837x_{n-3} - 19239x_{n-4} + 19239x_{n-5} \\
 &\quad - 8837x_{n-6} + 1795x_{n-7} - 128x_{n-8} + x_{n-9}, \quad (n \geq 10) \tag{3}
 \end{aligned}$$

közös, kilencedrendű lineáris homogén rekurzív egyenlettel adható meg és a kezdőelemek a 4. tétel (2) egyenletrendszeréből meghatározhatók.

Jelölje $\hat{a}_n, \hat{b}_n, \hat{c}_n, \hat{d}_n, \hat{e}_n, \hat{f}_n, \hat{g}_n, \hat{h}_n, \hat{k}_n$ és \hat{v}_n az n . szinten levő megfelelő típusú pontok értékeinek az összegét, valamint \hat{s}_n a szint összes értékének összegét. Ekkor a következő tételt fogalmazhatjuk meg.

6. Tétel. [13]. *Az $\{\hat{a}_n\}, \dots, \{\hat{k}_n\}$ és $\{\hat{s}_n\}$ sorozatok az*

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_n &= 147\hat{x}_{n-1} - 3635\hat{x}_{n-2} + 36277\hat{x}_{n-3} - 175292\hat{x}_{n-4} + 445156\hat{x}_{n-5} - 608920\hat{x}_{n-6} \\
 &\quad + 438532\hat{x}_{n-7} - 151320\hat{x}_{n-8} + 19344\hat{x}_{n-9} - 288\hat{x}_{n-10}, \quad (n \geq 11)
 \end{aligned}$$

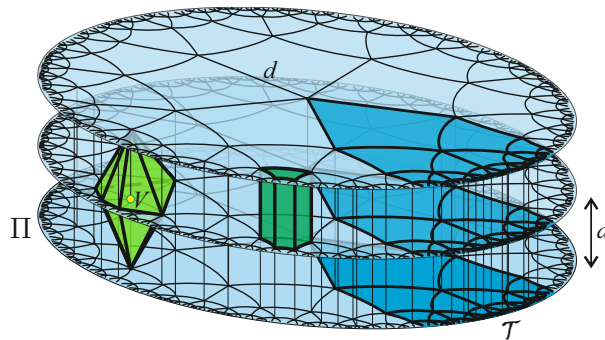
tizedrendű lineáris homogén rekurzióval adhatók meg. (A sorozat kezdőelemei [13]-ban található.)

4. Pascal tetraéder a $H^2 \times R$ térben

A diszkrét geometria problémái, eredményei általában az n -dimenziós állandó görbületű (euklideszi, hiperbolikus és szférikus) geometriákra korlátozódnak, habár az utóbbi években sok kutatás irányult a 3-dimenziós térbeli, un. Thurston geometriákra. E nyolc lokális homogén geometria magába foglalja a három konstans görbületű (minden irányban azonos görbületű)

E^3 , H^3 és S^3 geometriát, továbbá az öt lokális homogén, de más-más irányokban eltérő görbületű $H^2 \times R$, $S^2 \times R$, **Sol**, **Nil** és \widetilde{SL}_2R geometriákat ([8,9,20,24]). Az egyikük tere, a $H^2 \times R$ tér (a geometriát és a teret, amin a geometria érvényes, ugyanúgy jelöljük), a hiperbolikus sík H^2 és a valós egyenes R direkt szorzata. A továbbiakban ebben a térben megadunk egy kockamozaik típusát ([22]) és ezen definiáljuk a Pascal tetraéder egy újabb általánosítását.

Tekintsünk egy Π hiperbolikus síkot, mint egy alap (egy referencia) sík a $H^2 \times R$ térben és tekintsük továbbá a sík $\{4, q\}$ ($q \geq 5$) szabályos mozaikját. Legyen d ezen mozaik éleinek a hossza. Tekintsük azokat a hiperbolikus síkokat, amelyek párhuzamosak Π -vel és kd ($k \in \mathbb{Z}^+$) távolságra vannak tőle (ebben az irányban euklideszi párhuzamosság és távolság van érvényben). Adjuk meg ezeken a síkokon is a $\{4, q\}$ mozaikot úgy, hogy a különböző síkokon lévő, de egymásnak megfelelő pontokat összekötve a kapott élek is d hosszúságúak legyenek (a síkok közötti élek merőlegesek a síkokra). Legyen egy h^2r kocka az egymást követő síkok egymásnak megfelelő négyzeteinek konvex burka. A h^2r kockák összessége adja a $H^2 \times R$ térben h^2r kockamozaikját, amit a hiperbolikus síkbeli szabályos $\{4, q\}$ mozaikra alapoztunk. A 8. ábra három egymást követő hiperbolikus síkot és rajtuk a $\{4,5\}$ mozaikot mutatja. Az egymás "fölötti" négyzetek kockákat határoznak meg. Az ábrán ez egy sötétzöld (nyomtatásban sötét szürke) hasábként van szemléltetve. A 8. ábra világosabb ötszög alapú gúlája és annak tükörképe együtt a mozaikhoz tartozó csúcsalakzatot szemlélteti.

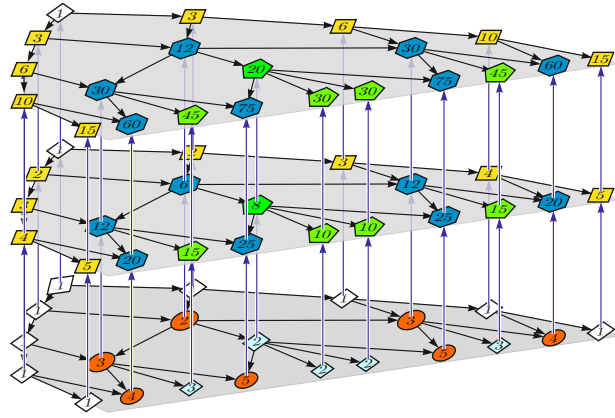
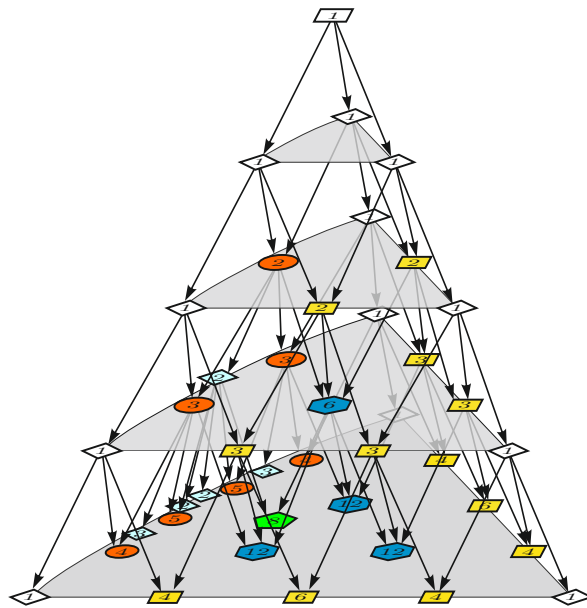


8. ábra. A $\{4,5\}$ mozaikra alapozott h^2r kockamozaik

A h^2r kockamozaikon a 2. fejezetben leírt hiperbolikus Pascal tetraéderhez teljesen hasonló geometriai konstrukcióval definiálhatjuk a $H^2 \times R$ tér $\mathcal{PP}_{4,q}$ Pascal tetraéderét (vagy Pascal piramisát). E Pascal tetraéder konstruktív megadását nem részletezzük (részletek [14]), helyette két ábrát mutatunk, melyek alapja a $\{4,5\}$ hiperbolikus mozaik. A 9. és a 10. ábrákon a $\mathcal{PP}_{4,5}$ Pascal tetraéder látható, először a 8. ábrán látható sötétkék (nyomtatásban sötétszürke) mozaikrészlet kinagyításával, másodszer már tetraéder formában.

Nyilvánvalóan $\mathcal{PP}_{4,q}$ -nak az egyik lapja $\mathcal{HPT}_{4,q}$, a másik kettő pedig az eredeti euklideszi Pascal háromszög. A $\mathcal{HPT}_{4,q}$ oldalon 3 típusú pontot különböztetünk meg, az A , B és 1 típusokat, az euklideszi Pascal háromszög lapokon pedig kettőt, legyenek ezek a C és az 1 típusok. A Pascal tetraéder belsejében pedig két újabb típust definiálhatunk, a D és E típust, D -nek három, míg E -nek kettő bejövő éle van.

Ha a_n, b_n, c_n, d_n és e_n jelöli rendre az n . szinten levő A, B, C, D és E típusú pontok számát, akkor a sorozatokra a következő (4) rekurzív egyenletrendszeret kapjuk.

9. ábra. A $H^2 \times R$ tér $\mathcal{PP}_{4,5}$ Pascal tetraédere10. ábra. A $\mathcal{PP}_{4,5}$ Pascal tetraéder

7. Tétel. [14]. A különböző típusú pontok számának növekedését leíró rekurzív egyenletrendszer ($n \geq 1$) az

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= a_n + b_n + 1, \\
 b_{n+1} &= (q-4)a_n + (q-3)b_n, \\
 c_{n+1} &= c_n + 2, \\
 d_{n+1} &= a_n + d_n, \\
 e_{n+1} &= b_n + e_n,
 \end{aligned} \tag{4}$$

ahol minden kezdőelem ($n = 1$) zéró.

Ebből pedig kapjuk a következő tételt.

8. Tétel. [14]. Az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $\{e_n\}$ és $\{s_n\}$ sorozatok közös, negyedrendű lineáris rekurzív sorozata az

$$x_n = qx_{n-1} + 2(1-q)x_{n-2} + qx_{n-3} - x_{n-4} \quad (n \geq 5)$$

sorozat. A kezdőelemeket a 7. tétel (4) egyenletrendszeré nyújtja. Az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sorozat a

$$x_n = (q - 1)x_{n-1} - (q - 1)x_{n-2} + x_{n-3} \quad (n \geq 4) \quad (5)$$

rekurzív egyenlettel is megadható, továbbá a sorozatok explicit formái az alábbiak:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{2-q}{2} + \frac{D+2}{2D} \sqrt{D} \right) \alpha_1^n + \left(\frac{2-q}{2} - \frac{D+2}{2D} \sqrt{D} \right) \alpha_2^n + 1, \\ b_n &= \left(\frac{q-3}{2} + \frac{1-q}{2q} \sqrt{D} \right) \alpha_1^n + \left(\frac{q-3}{2} - \frac{1-q}{2q} \sqrt{D} \right) \alpha_2^n - 1, \\ d_n &= \left(\frac{q^2-5q+5}{2(q-4)} - \frac{q^2-3q-1}{2D} \sqrt{D} \right) \alpha_1^n + \left(\frac{q^2-5q+5}{2(q-4)} + \frac{q^2-3q-1}{2D} \sqrt{D} \right) \alpha_2^n \\ &\quad + n - \frac{1}{q-4} + 1, \\ e_n &= \left(\frac{2-q}{2} + \frac{D+2}{2D} \sqrt{D} \right) \alpha_1^n + \left(\frac{2-q}{2} - \frac{D+2}{2D} \sqrt{D} \right) \alpha_2^n - n + 2, \\ s_n &= \left(\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2D} \right) \alpha_1^n + \left(\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2D} \right) \alpha_2^n + 2n - \frac{1}{q-4} + 1, \end{aligned}$$

ahol $D = q(q - 4)$, $\alpha_1 = (q - 2 + \sqrt{D})/2$ és $\alpha_2 = (q - 2 - \sqrt{D})/2$.

9. Megjegyzés. Ha $q \geq 5$, akkor az s_n sorozat generátor függvénye

$$g(x) = \frac{1 - (q - 3)x - (q - 4)x^2}{1 - qx + (2q - 2)x^2 - qx^3 + x^4}.$$

10. Tétel. [14]. Az egyes típusú pontokhoz és a teljes n . szinthez tartozó értékek összegét meghatározó $\{\hat{a}_n\}$, $\{\hat{b}_n\}$, $\{\hat{c}_n\}$, $\{\hat{d}_n\}$, $\{\hat{e}_n\}$ és $\{\hat{s}_n\}$ sorozatokat leíró hatodrendű lineáris homogén rekurzív egyenlet ($n \geq 6$) az

$$\begin{aligned} x_n &= (2q + 3)x_{n-1} + (-q^2 - 7q - 5)x_{n-2} + (4q^2 + 10q + 9)x_{n-3} + \\ &\quad (-5q^2 - 13q - 10)x_{n-4} + (2q^2 + 12q + 12)x_{n-5} + (-4q - 8)x_{n-6}. \end{aligned}$$

Irodalomjegyzék

- [1] **Anatriello, G. and Vincenzi, G.:** *Tribonacci-like sequences and generalized Pascal's pyramids*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **45** (2014), No. 8, 1220–1232. doi: [10.1080/0020739X.2014.914283](https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.914283).
- [2] **Belbachir, H., Németh, L., and Szalay, L.:** *Hyperbolic Pascal triangles*, Applied Mathematics and Computation, **273** (2016), 453–464. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.10.001>.
- [3] **Belbachir, H., Németh, L., and Szalay, L.:** *Properties of hyperbolic Pascal triangles*, AIP Conference Proceedings, **1867** (2017), No. 1, 020031–1—020031–5. doi: [10.1063/1.4994434](https://doi.org/10.1063/1.4994434).
- [4] **Bondarenko, B. A.:** *Generalized Pascal Triangles and Pyramids, Their Fractals, Graphs, and Applications*, Fibonacci Association, Santa Clara, CA, 1993.

- [5] **Coxeter, H. S. M.:** *Regular honeycombs in hyperbolic space*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, **3** (1956), 155–169.
- [6] **Harris, J. M., Hirst, J. L., and Mossinghoff, M. J.:** *Combinatorics and Graph Theory*, Springer, 2008.
- [7] **Hilton, P. and Pedersen, J.:** *Mathematics, models, and magz, Part I: Patterns in Pascal's triangle and tetrahedron*, Mathematics Magazine, **85** (2012), No. 2, 97–109.
- [8] **Molnár, E., Prok, I., and Szirmai, J.:** *Classification of tile-transitive 3-simplex tilings and their realizations in homogeneous spaces*, in: *Non-Euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume* (A. Prekopa and E. Molnár, eds.), vol. 581 of *Mathematics and Its Applications*, Springer, 2006 pp. 321–363.
- [9] **Molnár, E. and Szirmai, J.:** *Symmetries in the 8 homogeneous 3-geometries*, Symmetry: Culture and Science, **21** (2010), No. 1–3, 87–117.
- [10] **Németh, L.:** *On the 4-dimensional hyperbolic hypercube mosaic*, Publicationes Mathematicae, **70** (2007), No. 3–4, 291–305.
- [11] **Németh, L.:** *On the hyperbolic Pascal pyramid*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, **57** (2016), No. 4, 913–927. doi: [10.1007/s13366-016-0293-7](https://doi.org/10.1007/s13366-016-0293-7).
- [12] **Németh, L.:** *Fibonacci words in hyperbolic Pascal triangles*, Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica, **9** (2017), No. 2, 336–347. doi: [10.1515/ausm-2017-0025](https://doi.org/10.1515/ausm-2017-0025).
- [13] **Németh, L.:** *Hyperbolic Pascal simplex*, International Electronic Journal of Geometry, **10** (2017), No. 2, 46–55.
- [14] **Németh, L.:** *Pascal pyramid in the space $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Mathematical Communications, **22** (2017), 211–225.
- [15] **Németh, L.:** *The growing ration of hyperbolic regular mosaics with bounded cells*, Armenian Journal of Mathematics, **9** (2017), No. 1, 1–19.
- [16] **Németh, L. and Szalay, L.:** *Alternating sums in hyperbolic Pascal triangles*, Miskolc Mathematical Notes, **17** (2016), No. 2, 989–998. doi: [10.18514/MMN.2017.1793](https://doi.org/10.18514/MMN.2017.1793).
- [17] **Németh, L. and Szalay, L.:** *Recurrence sequences in the hyperbolic Pascal triangle corresponding to the regular mosaic $\{4,5\}$* , Annales Mathematicae et Informaticae, **46** (2016), 165–173.
- [18] **Németh, L. and Szalay, L.:** *Power sums in hyperbolic Pascal triangles*, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius, Seria Matematica, **26** (2018), No. 1, 189–203. doi: [10.2478/auom-2018-0012](https://doi.org/10.2478/auom-2018-0012).
- [19] **Németh, L. and Szalay, L.:** *Áttekintés a hiperbolikus Pascal háromszögekről (Review of the hyperbolic Pascal triangles)*, Dimenziók, Mat. Közl., **8** (2020), 61–74. doi: [10.20312/dim2020.07](https://doi.org/10.20312/dim2020.07).
- [20] **Pallagi, J., Schultz, B., and Szirmai, J.:** *Equidistant surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ space*, KoG, **15** (2011), 1–4.

-
- [21] **Pengelly, D.:** *Pascal's Treatise on the Arithmetical Triangle: Mathematical Induction, Combinations, the Binomial Theorem and Fermat's Theorem*, in: *Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles* (B. Hopkins, ed.), Mathematical Association of America, 2009 pp. 185–196. doi: [10.5948/UPO9780883859742.025](https://doi.org/10.5948/UPO9780883859742.025).
- [22] **Szirmai, J.:** *Geodesic ball packings in space for generalized Coxeter space groups*, *Mathematical Communications*, **17** (2012), No. 1, 151–170.
- [23] **Talata, I.:** *A 120-cella és a 600-cella 3-dimenziós reprezentációról*, *Dimenziók, Mat. Közl.*, **6** (2018), 13–23. doi: [10.20312/dim.2018.02](https://doi.org/10.20312/dim.2018.02).
- [24] **Thurston, W. P.:** *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.
- [25] **Vinberg, E. B. (ed.):** *Geometry II. Spaces of Constant Curvature*, vol. 29 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1993.