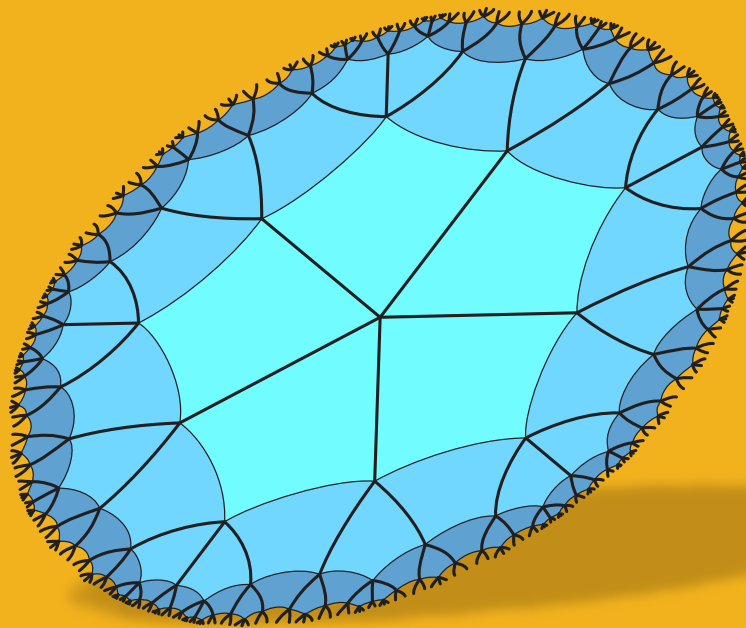


# Dimenziók

**Matematikai Közlemények**

**X. kötet**



**SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet  
Soproni Tudós Társaság  
2022**



# **Dimenziók**

**Matematikai Közlemények**

**X. kötet**

**SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet**

**Soproni Tudós Társaság**

**2022**

**A Dimenziók – Matematikai Közlemények** 2013 óta évente egyszer megjelenő tudományos folyóirat. A kéziratokat a szerkesztőbizottság tagjai, vagy független bírálók véleményezik, de a tartalomért a szerzők a felelősek.

**SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:**

Nagy Zsolt (címzetes egyetemi docens, középiskolai tanár)

Németh László (SOE, egyetemi docens)

Szalay László (SOE, egyetemi tanár)

**SZERKESZTŐ:**

Németh László

**TECHNIKAI SZERKESZTŐ:**

Németh László

**KIADÓ:**

Soproni Egyetem

Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar

Informatikai és Matematikai Intézet

9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.

és

MTA VEAB Soproni Tudós Társaság

9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.

Elektronikus elérhetőség: <http://matematika.emk.uni-sopron.hu/dimenziok>

HU ISSN 2064-2172

© Szabadon terjeszthető a forrás megjelölésével.

## **Tartalomjegyzék**

Elemi majdnem-Johnson-poliéderek és számítógépes modellezésük .....	3
A Cayley-Dickson-féle mátrixok algebrájáról.....	17
Covid variánsok időbeli változásának vizsgálata.....	23
A természetes szelekció vizsgálata varianciaanalízissel .....	37
Covid adatsor időbeli változásának vizsgálata új belépő variánsok esetén.....	47
A Coulomb-féle súrlódással csillapított rezgőmozgás – oktatói szemmel.....	59
Gerjesztett rezgések differenciálegyenletes modelljei .....	71
Konvex sokszöglemezek elsőfajú rögzítése .....	81
Lichtenstein's integral equation for the Stokes problem via conformal mapping.....	87

## Covid adatsor időbeli változásának vizsgálata új belépő variánsok esetén

Csanády Viktória

SOE Informatikai és Matematikai Intézet  
csanady.viktoria@uni-sopron.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A covid fertőzések esetszámának időbeli változása nem modellezhető klasszikus matematikai függvényekkel. Ennek oka az adatsor nagymértékű ingadozása. A folyamat tendenciájának vizsgálatához a belépő, új megjelenő variánsok miatt egy összetett függvény alkalmazása indokolt. Az alkalmazott modell jól követi a folyamatot a lépcsőzetesen megjelenő új vírus variánsok esetszám növelő hatása ellenére.

**ABSTRACT.** The change in the number of covid infections cannot be modelled simply with classical mathematical functions. This is due to the high fluctuation of the data series. To examine the trend of the process we need combinations of a few known functions due to the incoming and newly appearing variants. The applied model fits to the process, despite the effect of increasing the number of cases of new virus variants appearing in stages.

### 1. Bevezetés

A 2019 novemberében megjelent COVID vírus adatsorainak vizsgálata a fellépő új variánsok miatt hagyományos matematikai modellek felhasználásával nehézkes. Ennek nyilván az az oka, hogy a belépő új vírus variánsok impulzálják a meglévő adatsort, ami esetlegesen már lecsengő állapotban van. Természetesen a hatás erőssége különböző, egyes esetekben szinte elhanyagolható, máskor gyökeres változást eredményez. Az alábbiakban a vizsgálat tárgya a folyamat lépcsőzetes időbeli változása, melyet az egyes variánsok megjelenése tesz indokolttá. Így a modellezés egyes esetei mindig egy újabb variáns belépését tartalmazzák, a végső vizsgálati időpontig. A vizsgált adathalmaz a szomszédos Ausztria adatai 2021. 1. hetétől 2022. 28. hetével bezárólag, összesítve és variánsenként.

Az alábbiakban először bemutatásra kerül a megfigyelt időszakban előforduló variánsok gyakorisági eloszlása az idő függvényében, melyek jól láthatóan modellezhetők egy Gauss függvénnyel [1].

Ezt követően lépcsőzetes vizsgálattal, újabb variáns megjelenéséig az összesített adathalmazok modellezése következik. Ennek során kettős Gauss [3] és hármas Gauss [4] függvények illesztése indokolt. Bár az új belépő vírus variánsok az adathalmazban a várható változás tendenciáját megtörik, mégis indokolt a lépcsős vizsgálat kumulált adatsorokon. Az új belépő vírus variáns változást okoz, de a telítési jelleg feltételezhetően megmarad, nyilván a belépő intenzitásától függően változtatva paramétereit. A vizsgálatban modellként alkalmazott kettős és hármas Gauss függvények becslést adnak az új belépők által generált lokális maximum időpontjára és az esetszámok maximum értékére, jellemzik a folyamat konvexitását. Az alkalmazott Awrami telítési függvény [1] modellezi az egyes időintervallumok folyamatainak

várható lecsengését, amit bizonytalanná tesz a nyilván újabb és újabb vírus variáns megjelenése. Az illesztések pontosságának ellenőrzésére a mindenkori korrelációs együttható, (nem lineáris korrelációs együttható) került alkalmazásra, figyelembe véve, hogy jelen folyamatok esetén túl magas korrelációs érték nem várható el.

A vizsgálat célja az egyes variánsok lépcsőzetes belépése által történt folyamat változás jellemzése az alkalmazott modellek révén. Valamint a feltételezett telítési jelleg változásának bemutatása.

Az illesztések a STATISTICA programcsomag felhasználásával történtek.

A vizsgálat tárgya:

- ausztriai covid adatok 2021. 1. hét – 2022. 28. hét [2]. Heti lebontás vírus variánsokra illetve összesített adatszámra.

A vizsgált adathalmaz és az alkalmazott modellek:

Az adathalmaz esetében eltekintünk a teljes részletességtől az adatok fellelhetők a fentiekben megadott cím alatt.

Naptári hetek	B.1.1.7 (Alpha)	B.1.351 (Beta)	B.1 (Gamma)	B.1.617.2 (Delta)	BA.1 (Omikron)	BA.2/BA.3 (Omikron)	BA.4/BA.5 (Omikron)	B.1.1.529 nem differenciált (Omikron)	Össz esetek száma
2021-W01	108	7	0	0	0	0	0	0	115
2021-W02	352	59	0	0	0	0	0	0	411
2021-W03	456	137	0	0	0	0	0	0	593
2021-W04	1052	179	0	0	0	0	0	0	1231
2021-W05	1978	123	0	1	0	0	0	0	2102
2021-W06	1980	110	0	0	0	0	0	0	2090
2021-W07	3659	88	0	0	0	0	0	0	3747
2021-W08	7690	147	0	0	1	1	0	0	7839
2021-W09	9601	97	0	0	0	0	0	0	9698
2021-W10	11411	103	1	0	0	0	0	0	11515
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2022-W22	0	0	0	3	31	5053	1858	41	6986
2022-W23	1	0	0	2	42	5692	3991	69	9797
2022-W24	0	0	0	0	55	7400	7542	100	15097
2022-W25	0	0	0	1	78	6633	13920	78	20710
2022-W26	0	0	0	1	73	1676	21932	51	23733
2022-W27	0	0	0	1	121	934	21173	43	22272
2022-W28	0	0	0	2	112	669	21751	82	22616

1. táblázat. Covid adatok

Az alkalmazott regressziós modellek:

- Gauss függvény

- matematikai alakja:

$$y = \frac{b_3}{e^{(b_2(x-b_1))^2}} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$var2 = b3/\exp(b2 * (var1 - 1 * b1))^2 + b0.$$

- Kettős Gauss függvény [3]

- matematikai alakja:

$$y = \frac{b_6}{e^{(b_5(x-b_4))^2}} + \frac{b_3}{e^{(b_2(x-b_1))^2}} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$var2 = b6/\exp(b5 * (var1 - 1 * b4))^2 + b3/\exp(b2 * (var1 - 1 * b1))^2 + b0.$$

- Hármass Gauss függvény [4]

- matematika alakja:

$$y = \frac{b_9}{e^{(b_8(x-b_7))^2}} + \frac{b_6}{e^{(b_5(x-b_4))^2}} + \frac{b_3}{e^{(b_2(x-b_1))^2}} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$var2 = b9/\exp(b8 * (var1 - 1 * b7))^2 + b6/\exp(b5 * (var1 - 1 * b4))^2 + b3/\exp(b2 * (var1 - 1 * b1))^2 + b0.$$

- Awrami telítési függvény [1]

- matematikai alakja:

$$y = b_3 \left( 1 - e^{-(b_2 x)^{b_1}} \right) + b_0$$

- számítógépes alak:



$$var2 = b3 * \left(1 - \exp\left(-1 * ((b2 * var1)^{b1})\right)\right) + b0.$$

A modellek rövid jellemzése:

Az alkalmazott Gauss függvény négy paraméteres általános modell, a kettős és hármas Gauss függvény pedig a fentiekben megadottak szerint két illetve három Gauss függvény kombinációja, amelyek rendelkeznek a szükséges eltolási és nyújtási paraméterekkel. A paraméterek értékeiből pontosan meghatározhatók a modell fő matematikai jellemzői, így a lokális szélsőértékek helyei és értékei, továbbá információt kapunk a folyamat konvexitására. A paraméterek kezdőértékének megadása az adathalmazból becsülhető. Az alkalmazott Awrami telítési függvény a megadott általános alaktól annyiban tér el, hogy  $b_0$  értéke nullának veendő a folyamat jellege miatt. A három paraméter kezdőértéke az illesztésnél szükség esetén módosítható az adatsor alapján.

Az illesztések során a modell változói:

- VAR1 = Naptári hetek sorszáma
- VAR2 = B.1.1.7 Alpha
- VAR3 = B.1.351 Béta (\*)
- VAR4 = B.1 Gamma (\*)
- VAR5 = B.1.617.2 Delta
- VAR6 = BA.1 Omikron
- VAR7 = BA.2/BA.3 Omikron
- VAR8 = BA.4/BA.5 Omikron
- VAR9 = B.1.1.529 nem differenciált Omikron.

(\*) A csekély esetszámra való tekintettel a variáns a vizsgálatokban nem szerepel.

Egyesített adathalmazok heti gyakoriságra kettős és hármas Gauss függvény esetén:

- VAR25 = VAR2+VAR5
- VAR256 = VAR2+VAR5+VAR6
- VAR2567 = VAR2+VAR5+VAR6+VAR7
- VAR25678 = VAR2+VAR5+VAR6+VAR7+VAR8
- VARTotal = VAR2+VAR5+VAR6+VAR7+VAR8+VAR9

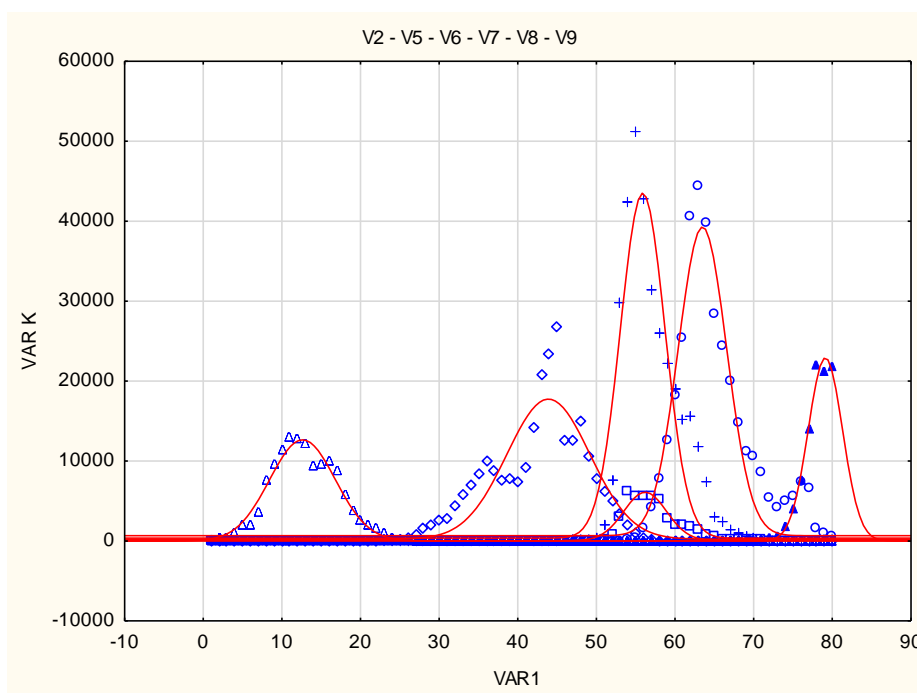
Egyesített kumulált adathalmazok Awrami függvény esetén:

- VARK25 = kumulált VAR25
- VARK256 = kumulált VAR256
- VARTK2567 = kumulált VAR2567
- VARTK25678 = kumulált VAR25678
- VARKTotal = kumulált VARTotal

## 4. Számított eredmények, kiértékelés

### 4.1. Covid adatsor lépcsőzetes elemzése regressziós eljárással.

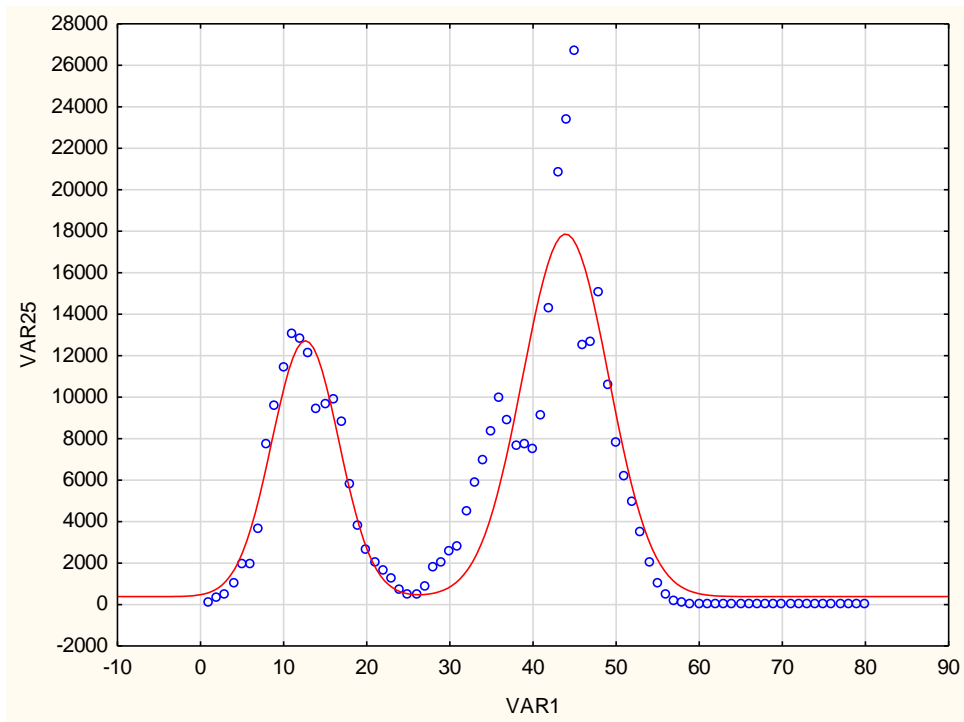
Első lépésben az alábbi ábrán bemutatásra kerülnek az egyes variánsok gyakorisági adatai az előfordulásuknak megfelelően egymástól függetlenül, a már korábban említett két variáns elhagyásával, csekély előfordulási adataik miatt.



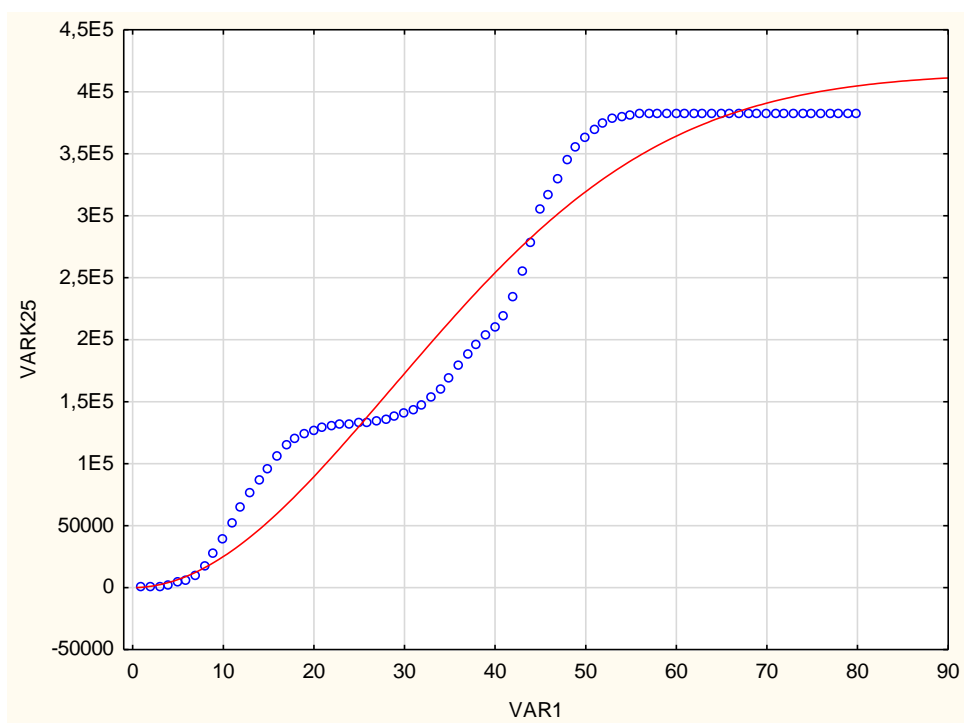
1. ábra. Vírus variánsok heti megjelenése

Az ábra jól mutatja, hogy az egyedi vírus variánsok gyakorisági eloszlása jól jellemezhető a Gauss görbével, az illesztés során kapott korrelációs érték ezt igazolta. (Csanády V.: Covid variánsok időbeli változásának vizsgálata.)

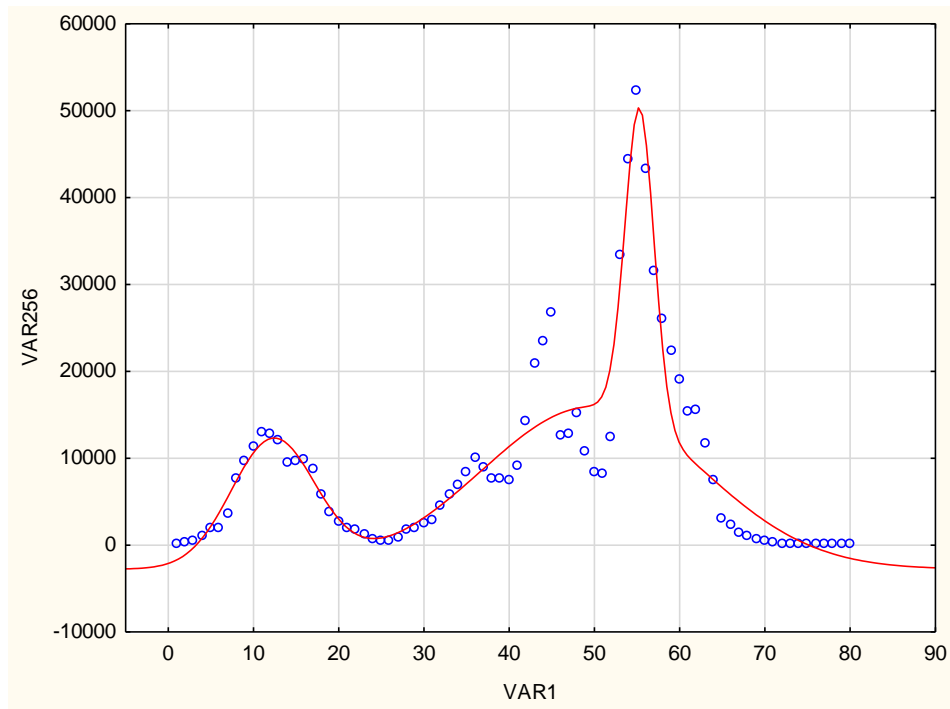
Az alábbiakban a lépcsőzetes vírus előfordulás folyamata kerül bemutatásra, melynek során kettős vagy hármas Gauss függvények illesztésére volt szükség. Valamint párhuzamosan látható a telítési folyamat változása a fokozatosan belépő új vírus variánsok esetén, a kumulált adathalmaz regressziója révén. Az egyes regressziós eljárások paraméter értékei nem kerülnek feltüntetésre, igény szerint a szerzőnél lekérhetőek.



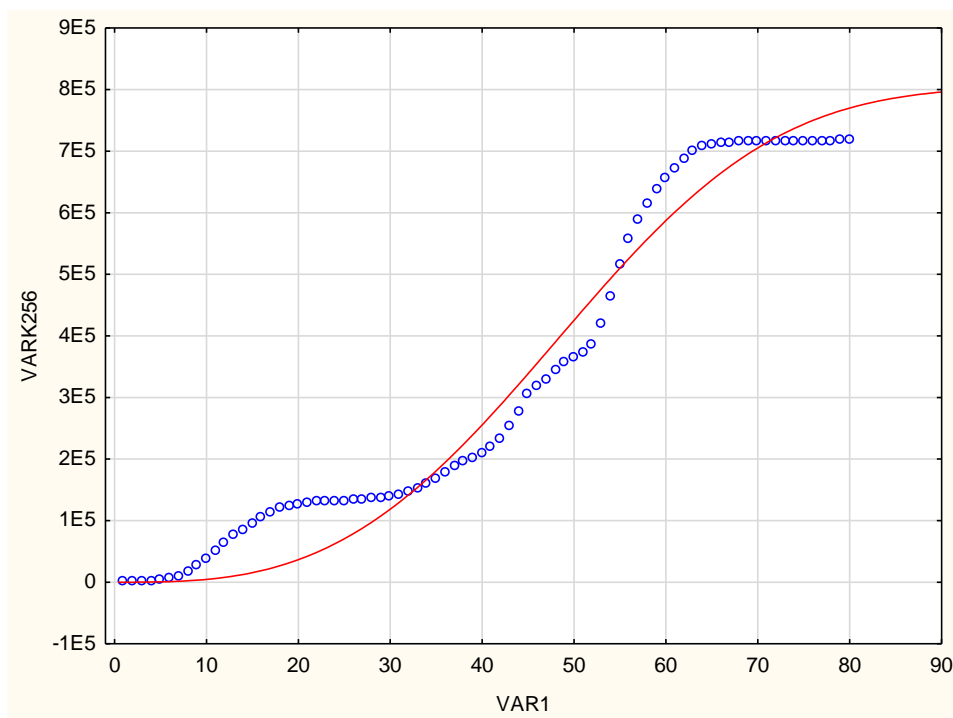
2. ábra. Kettős Gauss VAR25



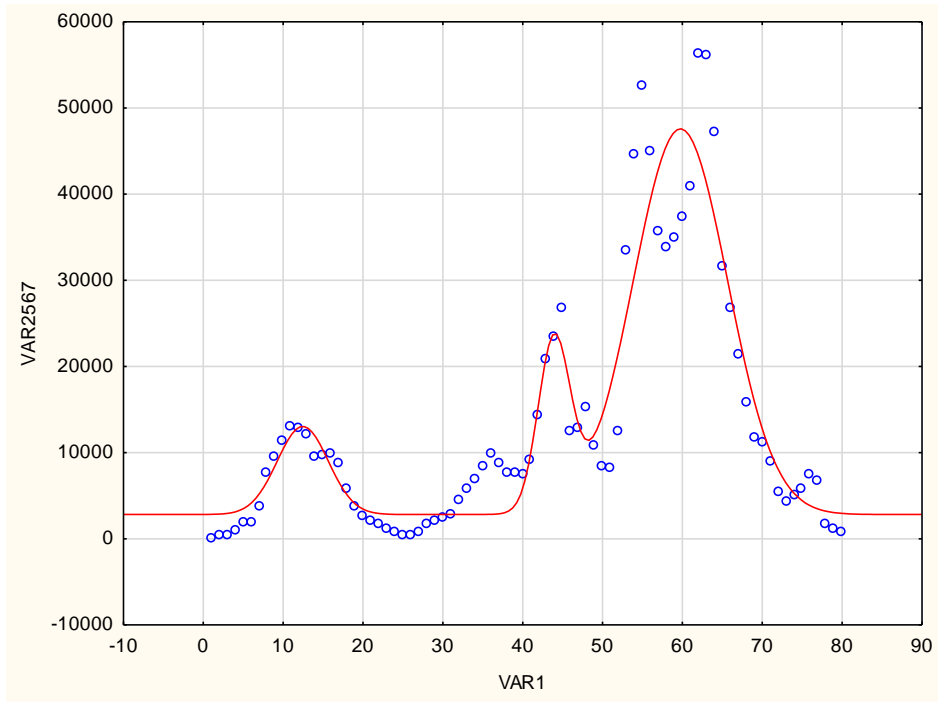
3. ábra. Awrami VARK25



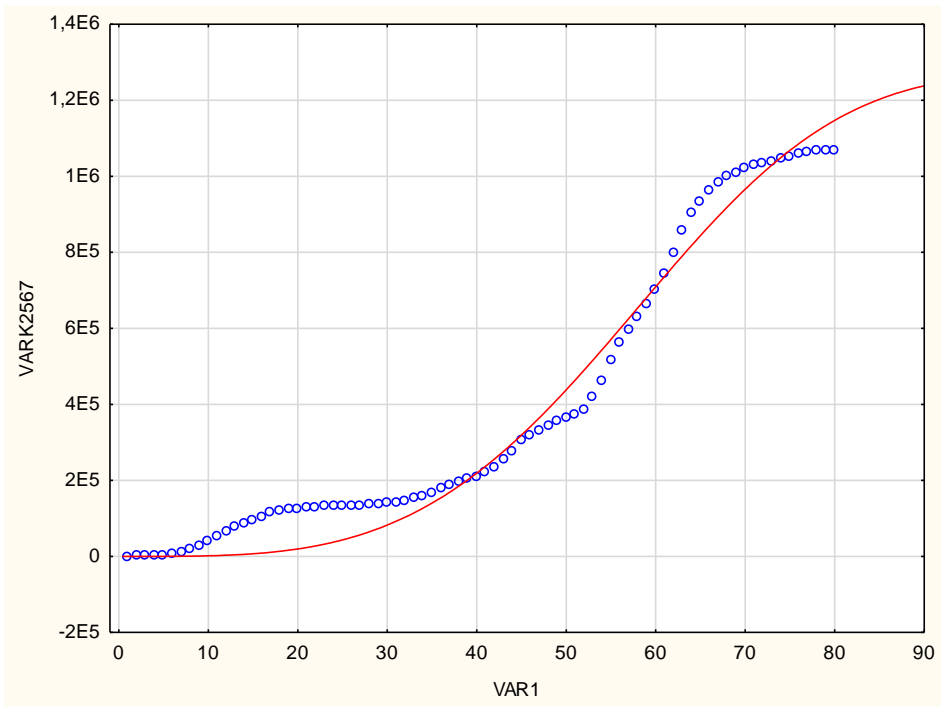
4. ábra. Hármass Gauss VAR256



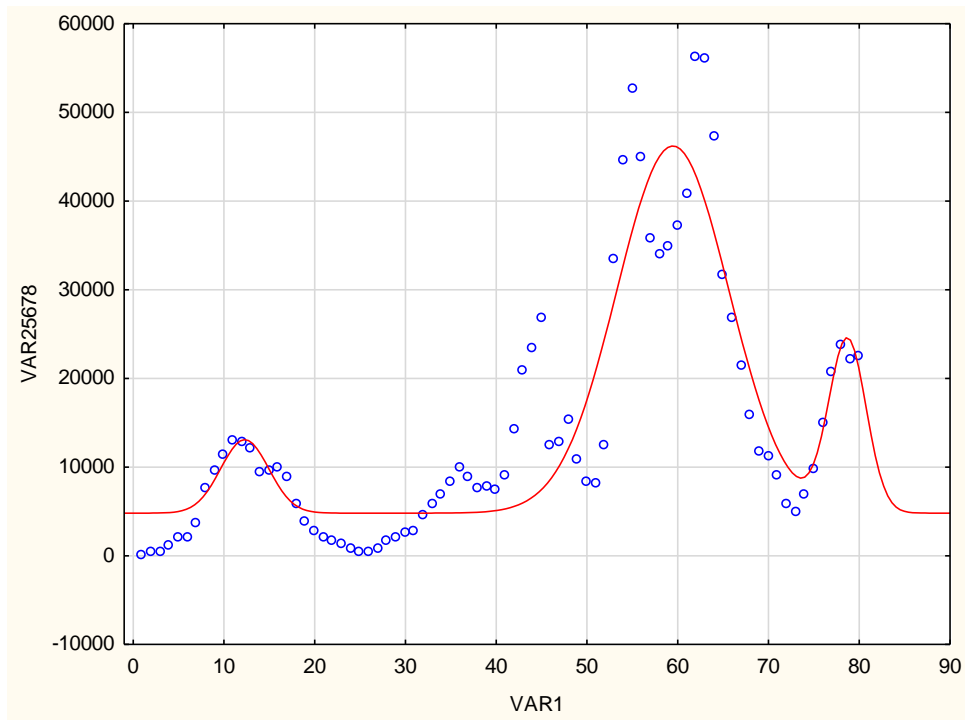
5. ábra. Awrami VARK256



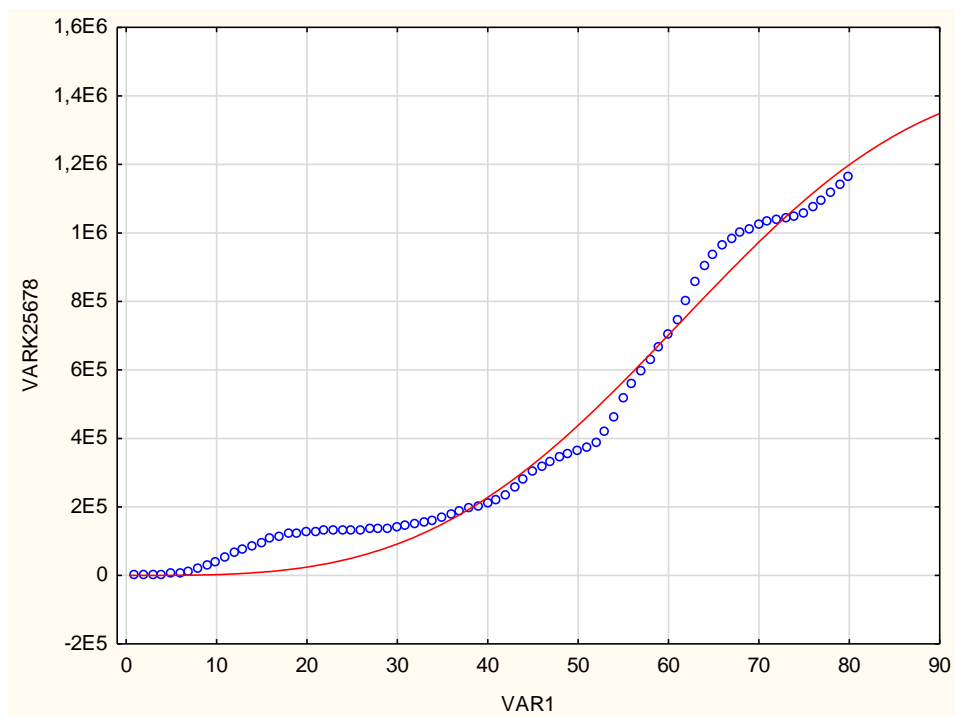
6. ábra. Hármias Gauss VAR2567



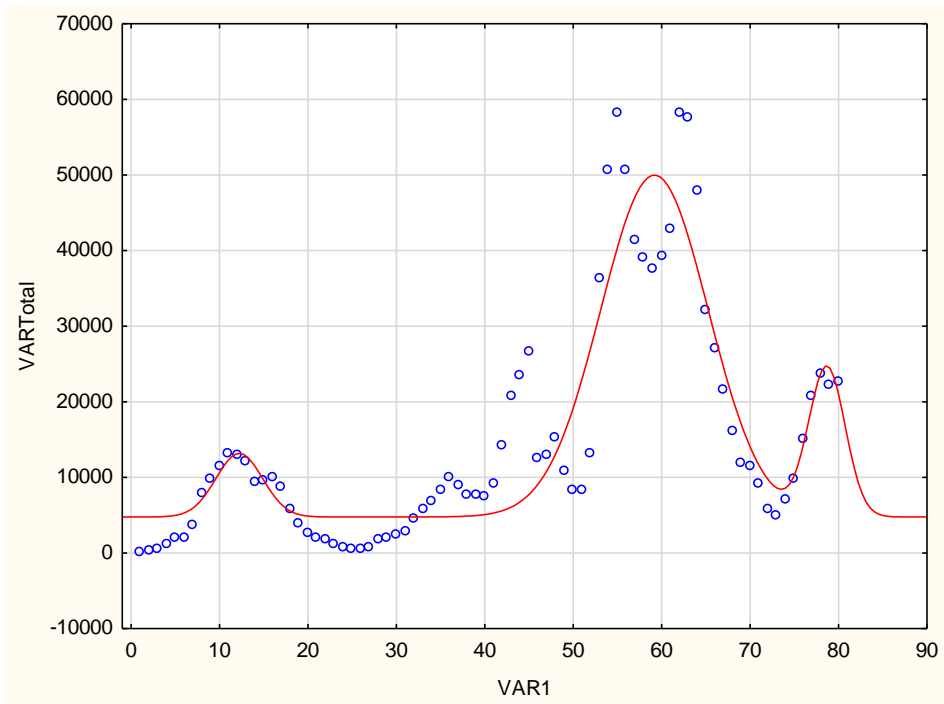
7. ábra. Awrami VARK2567



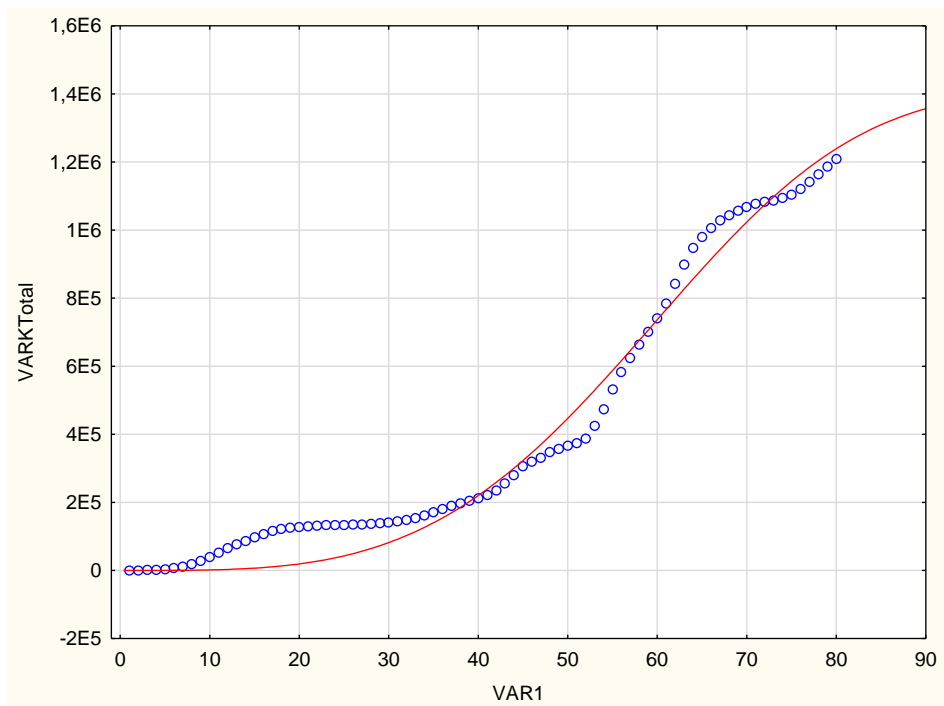
8. ábra. Hármás Gauss VAR25678



9. ábra. Awrami VARK25678



10. ábra. Hármass Gauss VARTotal.



11. ábra. Awrami VARKTotal.

## 4.2. Elemzés, értékelés

### *Lépcsőzetes covid adatsor regressziós vizsgálatának elemzése illesztett modellenként:*

- A kettős és hármas Gauss görbe illesztésének eredményei:

Az illesztéseknél lépcsőzetes sorrendben kerültek a megjelenő vírus variánsok a folyamatba. A léptetés során nem került számításba a VAR3 és VAR4 csekély előfordulási értékei miatt, valamint a VAR9 ami az idősorban a VAR6 és VAR7 értékeit erősítette korai maximumának megjelenésével, viszont számszerűleg csak önmagában nem jelentett volna a folyamatra nézve lényegi változást. Ezt igazolja a teljes adathalmazra történő illesztés eredménye is. Az alábbi táblázatban a korrelációs együttható jól mutatja, hogy a választott modellek a folyamatot megfelelően demonstrálják, a folyamat tendenciáját jól kísérik.

VAR	R	Függvénytípus
25	0,9306	kettős Gauss
256	0,9478	hármas Gauss
2567	0,9324	hármas Gauss
25678	0,8930	hármas Gauss
Total	0,9017	hármas Gauss

### 2. táblázat. Gauss modellek korrelációs együtthatói.

- Az Awrami függvény illesztésének eredményei:

A telítési függvény illesztésének korrelációs eredményei meghaladják a kettős vagy hármas Gauss esetén kapott értékeket.

VARK	R
25	0,9789
256	0,9821
2567	0,9869
25678	0,9885
Total	0,9882

### 3. táblázat. AWRAMI modell összefoglaló.

#### **Értékelés:**

A bemutatott grafikus reprezentáció, valamint az illesztések helyességét igazoló korrelációs érték azt mutatja, hogy a választott modellek alkalmasak a folyamat becslésére. A kettős Gauss függvény alkalmazása nyilván csak a kezdő két vírusú stádiumban használható a későbbiekben már nem. A hármas Gauss függvény viszont rugalmas, az ingadozó pontthalmaz



ellenére magas korrelációs együttható értékek mellett. Az illesztés eredménye azt mutatja, hogy a variánsok lépcsőzetes megjelenése ellenére nem mindegyik befolyásolja szignifikánsan a folyamatot. Az illesztett hármas Gauss függvény eredményeiből kimutatható, hogy a vizsgált időszakban a legdominánsabb variáns a maximum helyeinek alakulására nézve a VAR2 valamint a VAR7 illetve a VAR8. A maximum hely a VAR2 vonatkozásában a lépcsős illesztés ellenére is fixen maradt 12. hét. Itt megjegyzendő, hogy a 12. hét maximum értéke mindössze hatod része az abszolút maximum értéknek. A VAR7-t erősítette a VAR6 valamint a teljes adathalmaz vizsgálata során beléptetett VAR9, bár ennek a variánsnak az egyedszámait lényegesen kisebbek az előzőknél. Stabil maradt továbbá a VAR8-hoz rendelhető maximum hely is. A maximum helyekhez tartozó maximum értékek nyilván az összegzésből kifolyólag változnak.

Az Awrami függvény illesztése azt mutatja, hogy bár a folyamat lecsengése az újabb és újabb vírus variánsok megjelenése miatt megkérdőjelezhető, a függvény alkalmas az adathalmazok jellemzésére. Nem várható azonban az el, hogy adott hibahatárra jóslást adhassunk a folyamat végére.

## 5. Összefoglaló

A matematikai modellezés gyakori feladat, amelynek során többek között folyamatok időbeli lefutását kívánjuk jellemezni. Nem mindegy azonban, hogy jól mérhető egzakt mennyiségek közötti kapcsolatot elemzünk, vagy olyan jellegű adatsorokat, amelyek pontossága megkérdőjelezhető, számos véletlenszerű hatótényező miatt. A fentiekben vizsgált adatsorok ez utóbbi csoportba tartoznak, így a modellezés eredménye inkább csak durva becslésre alkalmas. Az említett adatbizonytalanság ellenére azonban a felhasznált modellek a tendenciákat jól követik, megadják továbbá a vizsgált vírus variánsok domináns tagjait. A vírus változékonyság miatt azonban, az alkalmazott modellek jövőbeli adat becslésre nem alkalmasak.

## Irodalomjegyzék

- [1] Csanády, V., Horváth-Szováti, E., Szalay, L., Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó (2013), 175p.
- [2] <https://www.ages.at>
- [3] Csanády, Viktória Kettős Gauss függvény alkalmazása Dimenziók, Matematikai közlemények 7, .(2019) 37-47. doi:10.20312/dim.2019.05
- [4] Bende, A., Csanády, V., László, R. Az erdei szalonka (*Scolopax rusticola* L.) magyarországi tavaszi vonulásának modellezése nemlineáris regressziós eljárások segítségével Dimenziók: Matematikai Közlemények 9, .(2021) 23-31. doi:10.20312/dim.2021.03