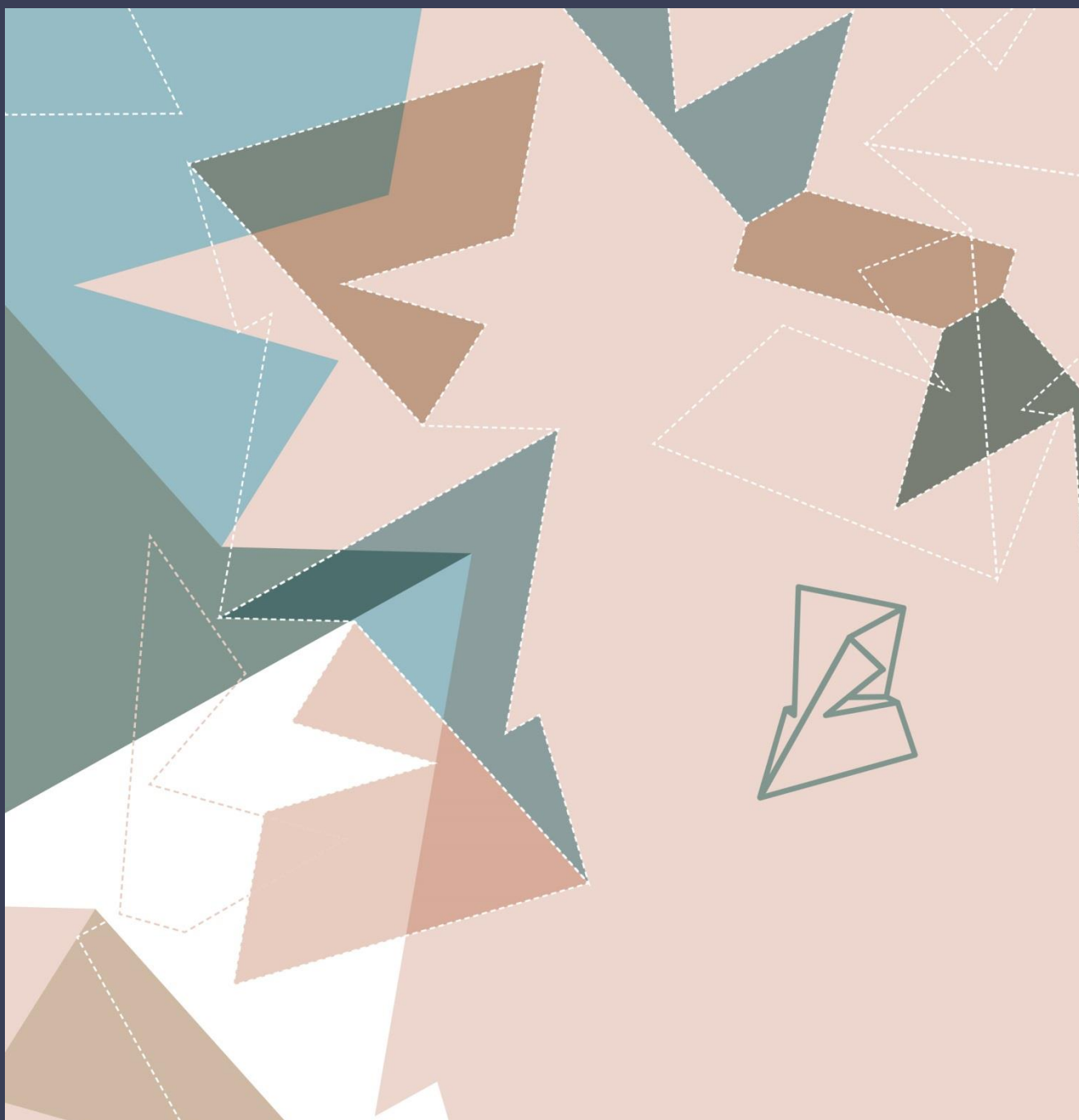




SOPRONI
EGYETEM |

FAIPARI MÉRNÖKI ÉS
KREATÍVIPARI
KAR



Konstruktív Geometria

KGK 2024 KONFERENCIAKÖTET

Szerkesztő: Németh László



Szerkesztő: Németh László

Konstruktív Geometria

KGK 2024 KONFERENCIAKÖTET



SOPRONI EGYETEM KIADÓ

SOPRON, 2024

A kötet a Sopronban 2024. június 6–7-én *KGK 2024 Konstruktív Geometria Konferencia* címmel megrendezett tudományos konferencia előadásainak szerkesztett anyagait tartalmazza.

A konferencia támogatói
Konstruktív Geometria Egyesület és a Soproni Egyetem Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kara

Felelős kiadó: Prof. Dr. Fábrián Attila
a Soproni Egyetem rektora

Lektor

Uhl Gabriella, Kósa Balázs

Technikai szerkesztő

Mucsi Zsuzsanna

Illusztrátorok / grafikusok

Szarka Judit Gabriella, Kósa Balázs, Horváth Péter György

ISBN 978-963-334-540-5 (pdf)

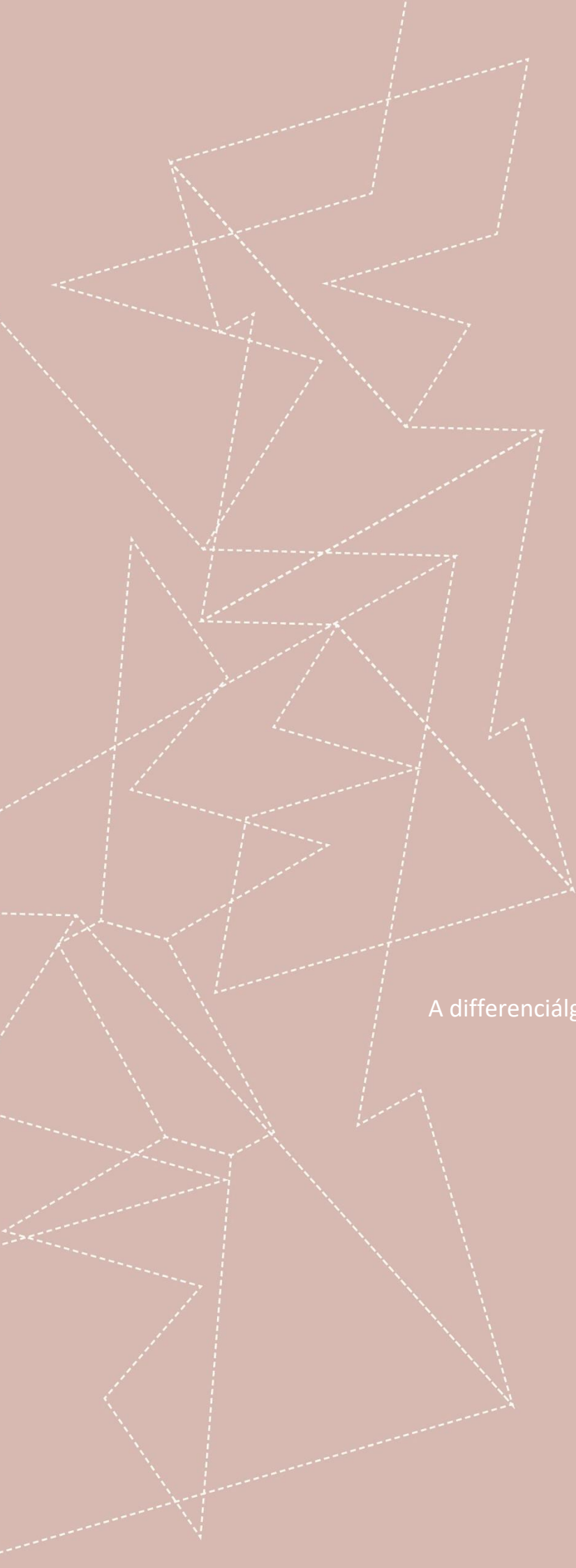
Creative Commons license: BY-NC-SA 4.0 DEED



Nevezd meg! Ne add el! Így add tovább! 4.0 Nemzetközi
Attribution – Non commercial – Share Alike 4.0 International

Tartalom

PÉK Johanna A differenciálgeometria egy lehetséges oktatási módja az építészmérnök képzésben	5
NAGY Máté Hajtogatásminták: síkból térbe – műszaki alkalmazások	13
NAGYNÉ KONDOR Rita Geometriai problémamegoldás és a szakképzés	21
PÉK Johanna A differenciálgeometriai tudás fejlődésének vizsgálata építészmérnök hallgatók esetén	29
PAPP Ildikó Geometriai ismeretek szerepe a 3D modellezésben	39
HORVÁTH Péter György GARAB József NÉMETH László Geometriai alapú famegmunkálás lézervágási példán keresztül	55
MOLNÁR Emil Kétszeresen lyukasztott euklideszi és hiperbolikus sokaságok, mint a „kvantum pöttyök” magyarázata. 40 éves tisztelet a 2023. évi Kémiai Nobel Díj Kitüntetettjeinek és Bolyai János Abszolút Geometriájának 200. évfordulójára	65
SZABÓ Péter Geometriai kihívások a faépítészetben	79
TALATA István IMRE Emőke GODA Tibor LEAK James Homogén gömbpakolásokról	89



A differenciálgeometria egy lehetséges oktatási módja
az építészmérnök képzésben

PÉK JOHANNA

A differenciálgeometria egy lehetséges oktatási módja az építészmérnök képzésben

PÉK Johanna

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építészmérnöki Kar,
email: pek.johanna@epk.bme.hu

Absztrakt

A cikkben szeretnénk bemutatni a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építészmérnöki Karának Forma és Szerkezet Specializációján felvehető Haladó számítógépes geometria című tantárgy egy lehetséges felépítését. A tantárgy 2023 őszén indult először, és elsődleges célja a leendő építészmérnökök differenciálgeometriai ismereteinek bővítése. Kiemelt cél volt azon képesség kialakítása, hogy a hallgatók a későbbi terveikben túllépjenek a hagyományos formavilágon: a másodrendű felületek kreatív alkalmazásától indulva a freeform felületekbe is betekintést kaphattak. Röviden összefoglaljuk a tantárgy féléves tematikáját, követelményeit, valamint áttekintjük az ahhoz tartozó jegyzetet és segédanyagokat.

Kulcsszavak: differenciálgeometria, építészet, oktatásmódszertan, GeoGebra

A Possible Way of Teaching Differential Geometry in Architectural Engineering Program

Johanna Pék

*Budapest University of Technology and Economics, Faculty of Architecture, Budapest, Hungary,
email: pek.johanna@epk.bme.hu*

Abstract

In this article, we would like to present a possible curriculum of the course Advanced Computer Geometry, which can be taken at the Form and Structure Specialization of the Faculty of Architecture of the Budapest University of Technology and Economics. The subject started for the first time in the fall of 2023, and its primary goal is to expand the differential geometry knowledge of future architects. A key goal was to develop the ability of the students to go beyond „the traditional world of forms” in their later designs: starting from the creative application of second-order surfaces, they studied about freeform surfaces as well. We will briefly summarize the schedule and requirements of the course, as well as we will show the related notes and supporting materials.

Keywords: differential geometry, architecture, teaching methods, GeoGebra

1. Bevezetés, motiváció

A XXI. században már természetesnek vesszük, hogy a megtervezett épületek formavilága túlmutat az egyszerű poliéderek alkalmazásán. A következő lépcsőfok a másodrendű felületek, vonalfelületek és csavarmozgással származtatható felületek használata volt. A számítógép és a komputergeometria térhódításával megjelentek a freeform görbék és felületek az építészetben is. Ezek az avatatlan szemlélő számára futurisztikus látványt nyújtanak, holott a mögötte meghúzódó matematikai háttér nem feltétlenül bonyolult, alapszintű egyetemi matematikai tanulmányok birtokában elsajátítható ismeret. Jelenleg az építészmérnök képzésben a már „jól bejárattott”, könnyen kezelhető számításokkal megtervezhető másodrendű felületek, illetve vonalfelületek a gyakoriak. A freeform felületek esetében a tervezés erőteljesen támaszkodik az adott számítógépes tervezőprogramra (például a CAD-programok egy része, illetve a Grasshopper és a Rhinoceros 3D) gyakran anélkül, hogy az építészek annak mély geometriai tartalmával tisztában lennének. Az érdeklődő hallgatók számára ezért egy olyan tantárgyat szerettünk volna kifejleszteni, amely ezt a geometriai-matematikai háttérrel sajátítja el. A cél az volt, hogy a jól ismert görbéket és felületeket, valamint az egyszerűbb freeform felületeket analitikus geometriai úton is megismerjék a hallgatók. Ezzel a matematikai ismerettel pedig jóval hatékonyabban és kreatívabban használhatják a fent említett tervezőprogramokat, sőt, újszerű és egyedi felületek megalkotására is képesek lehetnek.

2. A módszertani háttérről és a tantárgyról röviden

Ahhoz, hogy hatékonyan lehessen differenciálgeometriát oktatni az építészmérnök hallgatók számára, szükség van alapozó matematika tantárgyakra, ahol többek között mátrixokkal kapcsolatos alapvető műveleteket, differenciál- és integrálszámítást tanulnak. Elengedhetetlen továbbá alapvető ábrázoló geometriai és informatikai ismeret, hiszen ismertnek tételezzük azt, hogy a hallgató legalább a másodrendű görbékről és felületekről hallott. Szintén fontos, hogy legyenek olyan tervezési és műszaki ismeretei, amelyek már korábban rávilágítanak a különböző felületek alkalmazhatóságának fontosságára – röviden: a hallgatónak legyen meg a belső motivációja. Ezért – véleményünk szerint – a tantárgy optimális helye egy osztatlan képzés utolsó négy félévében vagy a mesterképzésben van. A tantárgy tematikájának és a témakörökön belüli feladatok összeállításakor szem előtt kellett tartani, hogy a hallgatókat elsősorban nem a matematika, hanem a megalkotható felületek szépsége és lehetőségei érdeklik, ezért egyensúlyt kellett találni a precizitás és a „fogyaszthatóság” között. A létrehozott, mintául szolgáló tantárgy a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építészmérnök Kar építészmérnök osztatlan képzésében választható „Forma és szerkezet” specializációjának egyik tantárgya: a Haladó számítógépes geometria. Ez 4-5. éves hallgatók számára kötelezően választható tantárgy, egyórás előadással és kétórás laborgyakorlattal.

3. A tantárgy tematikája, a felhasznált programok

Ahogy korábban említettük, a tantárgy felépítésének egyik nehézsége, hogy relatíve kevés, az építészmérnök képzésre klasszikusan jellemző két (esetleg három) félév matematikai ismeretre támaszkodva építhető fel a tematika. Emiatt a klasszikus differenciálgeometriai vagy differenciálgeometriai alapokat tartalmazó tankönyvek (például [8] és [9]) nem feltétlenül alkalmazhatóak egy az egyben: vagy túlságosan sok matematikai tudást tételeznek fel, vagy pedig elemi tárgyalással közelítik meg azokat a fogalmakat, amelyekre a tantárgyban analitikus definíciókkal van szükség.

A felépítéshez jó kiindulópontként szolgálnak az építészek számára készült angol nyelvű könyvek ([1], [7]), továbbá a matematika alapképzésekben gyakori, „könnyedebb” tárgyalásmódú jegyzetek (például [2]). A felhasznált programok kiválasztásakor lényeges szempont, hogy minden felhasználóbarát-funkciótól mentes, elemi- és differenciálgeometriai gondolkodást kikényszerítő szoftvert használjon a hallgató. Erre a célra tökéletesen alkalmas a GeoGebra, amely ingyenesen használható, és a 3D parancsai lehetővé teszik a felületek többféle ábrázolását is. A GeoGebra másodrendű felületeket képes azonnal ábrázolni, azonban minden más felület esetén parametrikus leírás (esetleg implicit alak) szükséges. Ez teszi lehetővé, hogy a hallgató a programok nyújtotta „kényelmi szolgáltatásoktól” megfosztva, analitikusan gondolkodjon; ráadásul a komponensfüggvények vagy a paraméterek változtatásával organikusán, látens módon fejlődik ez irányú képessége. Érdekességként említjük meg, hogy Lastra építészek számára készült Parametric Geometry of Curves and Surfaces című tankönyve ([1]) szintén a GeoGebra programot használja. A tematika végleges összeállítása a klasszikus differenciálgeometriai felépítést követi, kiegészítve az építészetben ma már alapvetőnek számító freeform görbékkel és felületekkel.

- A görbeelmélet alapjai. Másodrendű görbék
- A felületelmélet alapjai
- Másodrendű felületek
- Forgásfelületek
- Transzlációs felületek
- Vonalfelületek, torzfelületek
- Kifejthető felületek
- Csavarmozgással kapható felületek
- Csőfelületek
- Freeform görbék (Bézier, B-spline, NURBS)
- Freeform felületek (Bézier, B-spline, NURBS)
- A jegyzetben: Kiegészítés (matematikai összefoglaló)

4. Feladattípusok és számonkérés lehetőségei

Természetes, hogy az építészeti tervezési munka alkalmazás centrikus megközelítést kíván. Ezért az egyes témakörökhöz olyan feladattípusokat célszerű választani, amelyek lehetőség szerint rögtön rámutatnak az adott felület, mint forma felhasználására. Egy ilyen tantárgynak nem lehet célja pusztán az elméleti megközelítés, így a példák sem az apró matematikai finomságok letisztázását szolgálják.

4.1. Feladattípusok

A feladattípusokat két fő csoportra lehet osztani: „formafelismerést” és „formaalkotást” gyakoroltató feladatokra. Az első feladattípus lényege, hogy egy adott épület egy részének (homlokzat, tetőszerkezet stb.) geometriai tulajdonságait és sajátosságait kell felismerni. Ha sikeresen rájön a hallgató, hogy az épületrészlet milyen felületből származtatható, a feladat második felében – főként a GeoGebra programmal – rekonstruálnia kell magát az épületrészletet. A második feladattípus esetében adott instrukciók alapján kell létrehozni egy felületet (1. ábra). A „formaalkotást” igénylő feladatok tisztán az adott felület típus alapvető tulajdonságait, geometriai specifikumait, paraméteres vagy implicit leírási módjait mélyítik el a hallgatókban.

Ezen képesség kialakítása nélkülözhetetlen ahhoz, hogy a leendő építész később a saját gondolatait, terveit matematikailag precízen le tudja írni.

Tekintsünk egy-egy mintát a feladattípusokra. Egyszerű formaalkotásra egy példa: *Adjuk meg az $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$, $z = 0$ egyenletrendszerű körre írható egyenes körkonoid egy paraméteres leírását, ha a konoid „magassága” 6 egység! Ábrázoljuk a konoid vezérgör és vezéregyenes közötti darabját és egy, a vezéregyenes feletti felületdarabját együttesen!* Jól látható, hogy a feladat célja az egyenes körkonoid definiáló objektumainak felismertetése, az implicit és a paraméteres alak közötti átjárhatóság, valamint a paramétertartományok helyes megválasztásának gyakoroltatása. A matematikai készségek fejlesztése miatt, ezeknél a feladatoknál a hallgatóktól elvárás a hagyományos, papíron való számolás a teljes félév során; csak szükség esetén – például egy deriválás ellenőrzésére – vehetők igénybe a számítógépes programok: főként a GeoGebra CAS vagy a Wolfram Alpha. Ezen segédprogramok esetenkénti alkalmazása szintén hasznosnak bizonyul az építésztechnikus képzésben. A tapasztalat azt mutatja, hogy ezek az ingyenes programok a gyakorló építészek körében, hasznosságuk ellenére, sajnos nem eléggé ismertek.

A „formafelismerésre” irányuló feladatok rejtett módon hatékonyan fejlesztik a differenciálgeometriai gondolkodásmódot, a nyílt és könnyen felismerhető céljuk pedig az analízis látásmód erősítése. Ilyen feladat például az alábbi, alapvető példa: *Adjuk meg parametrizált felületként az alábbi épület egyköpenyű hiperboloidot tartalmazó részét! (Elegendő egy jó közelítés.)*



1. ábra. Példa formafelismerésre, Forrás: Steven M. L., (2007). A photograph of the Saint Louis Science Center's James S. McDonnell Planetarium
[https://en.wikipedia.org/wiki/Saint_Louis_Science_Center#/media/File:Mcdonnell
/ planetarium_slsc.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Saint_Louis_Science_Center#/media/File:Mcdonnell_planetarium_slsc.jpg)

Ennél a feladatnál egyértelműen láthatjuk a kettős célt: a hallgatónak először elemeznie kell a felületet, majd az ötletét le kell tudnia fordítani a differenciálgeometria nyelvére. A későbbiekben bonyolultabb formák felismerésére is képesek a hallgatók, ahol nincs megnevezve a felülettípus sem. Ezen feladatok megoldása közben a diák gyakran tippelget, különösen a paramétertartományok és egyéb futó paraméterek esetében. Ezt minden esetben érdemes megengedni; sőt, éppen ez a próbálkozási folyamat segíti elő a valódi, célul kitűzött geometriai szemlélet fejlesztését. A fenti példák jól mutatják, hogy ez a kétirányú megközelítés hatékonyan segítheti az építészmérnök hallgatók differenciálgeometriai szemléletének kialakítását.

4.2. Számonkérési lehetőségek

A számonkérés a mintául szolgáló tantárgyban három részből áll: két zárthelyi dolgozattól, valamint egy projektfeladattól. A zárthelyi dolgozatok a laborgyakorlatokon megismert példatípusokat tartalmazzák. Mivel a cél nem az, hogy a hallgatók memorizálják a felületek lehetséges előállításait, ezért a saját jegyzetüket használhatják a dolgozatok során. A zárthelyi dolgozatok feladatai ezt figyelembe véve készülnek – a „mechanikus” alkalmazáson túlmutató példákat is tartalmaznak. A felmérés arra irányul, hogy a hallgatók képesek-e a tanultakat önállóan alkalmazni, egyszerűbb számításokat elvégezni, esetleg a megismert felületeket egymással kombinálni. A projektfeladat során a hallgatónak egy már létező épületet kell rekonstruálnia, vagy alkothat egy teljesen új épületrészletet egy általa létrehozott, egyedi felületből (felületekből). A projektfeladat célja a hallgató kreativitásának fejlesztése, valamint a modern, XXI. századi épületekben való jártasságának bővítése.

5. Kapcsolódó jegyzet és segédanyagok felépítése

A tantárgyhoz feladatgyűjteménnyel kiegészített jegyzet is készült, amely jelenleg 66 oldalas, és a hallgatók számára a zárt Moodle-rendszerben elérhető és letölthető. A jegyzet felépítése során törekedtünk az elméleti rész minimalizálására, és a gyorsan alkalmazható számítások rövid, de precíz tárgyalására. Egyes esetekben a bizonyításokat sem mellőztünk – ezek a levezetések akkor kerültek bemutatásra, amikor azoknak közvetlen gyakorlati haszna is volt, ezzel is erősítve a hallgatók logikai és következtetési készségeit. Ez különösen fontos, hiszen a jelenlegi középiskolai oktatásban egyre kevésbé szerepelnek bizonyítások, ez a hiátus pedig megfosztja a hallgatókat attól a képességüktől, hogy egy adott, akár kis terjedelmű elméleti következtetéssorozatot sikeresen le tudjanak vezetni. A feladattípusokat, illetve azok módszertani törekvéseit egy korábbi fejezetben már részletesen tárgyaltuk. A jegyzetben, a fokozatosság elvét követve, az egyszerűbb, tisztán az elméleti rész alkalmazását igénylő példáktól haladunk az esetenként igen nehéz, ötletes számításokat kívánó feladatokig. Egy egyetemi gyakorlati csoportban természetesen fellépő különbségeket az érdeklődésben, tehetségben és hozzáállásban könnyen át lehet hidalni, ha a nehéz példánál a kulcsfontosságú számítási részletet például zárójelben segítségként leírjuk. Ily módon a hallgatók közötti differenciálás is megvalósítható: az elmélyülni kívánó hallgatók önállóan kiszámolják a szükséges képleteket, az átlagos képességű diákok pedig be tudnak kapcsolódni a feladat már csupán alkalmazást igénylő részébe. A jegyzet alapfokon tárgyalja a Bézier, B-spline és NURBS-görbéket és felületeket. Az analitikus megközelítés miatt ezekben a témakörökben is a GeoGebra használata volt az elsődleges. A szükséges matematikai háttér ismeretében ezen felületeket megvizsgálhatjuk egy CAD programban (a félév során az AutoCAD-ben).

Példaképpen a Vonalfelületek, illetve a Freeform görbék és felületek témakör néhány oldalát mutatjuk meg. A jegyzet ábrái a GeoGebra programmal készültek, és minden fájl elérhető a tantárgyat hallgatók vagy külsős érdeklődők számára is [6]. Az egyes anyagrészek tárgyalása erősen alapoz a hallgatók korábbi ismereteire, ezért például a Vonalfelületek témakör nem igényel aprólékos bevezetést, míg a Freeform görbék és felületek bemutatása nem mellőzheti a szükséges matematikai háttér ismertetését. Itt jegyeznénk meg, hogy a BME Építészmérnöki Karának hallgatói a GeoGebra programmal alapfokon már elsőéves korukban megismerkednek, az Ábrázoló geometria tantárgy keretén belül [5], ezért annak alkalmazása nem okoz különösebb problémát a tantárgyat felvevő hallgatók számára.

The figure consists of 12 screenshots from a GeoGebra manual, arranged in a 3x4 grid. Each screenshot shows a different page with text, diagrams, and mathematical formulas. The pages cover topics such as:

- 28. oldal:** Introduction to surfaces, defining a surface as a set of points in space, and showing a surface plot.
- 29. oldal:** Parametric surfaces, showing a surface defined by three parametric equations and its plot.
- 30. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 31. oldal:** Freeform curves, showing a curve defined by a set of control points and its plot.
- 32. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 33. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 34. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 35. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 36. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 37. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 38. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 39. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 40. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 41. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 42. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 43. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 44. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 45. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 46. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 47. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 48. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 49. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 50. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 51. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 52. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 53. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 54. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 55. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 56. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 57. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 58. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 59. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 60. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 61. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 62. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 63. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 64. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 65. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 66. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 67. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 68. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 69. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 70. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 71. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 72. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 73. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 74. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 75. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 76. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 77. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 78. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 79. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 80. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 81. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 82. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 83. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 84. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 85. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 86. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 87. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 88. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 89. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 90. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 91. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 92. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 93. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 94. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 95. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 96. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 97. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 98. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 99. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.
- 100. oldal:** Freeform surfaces, showing a surface defined by a set of control points and its plot.

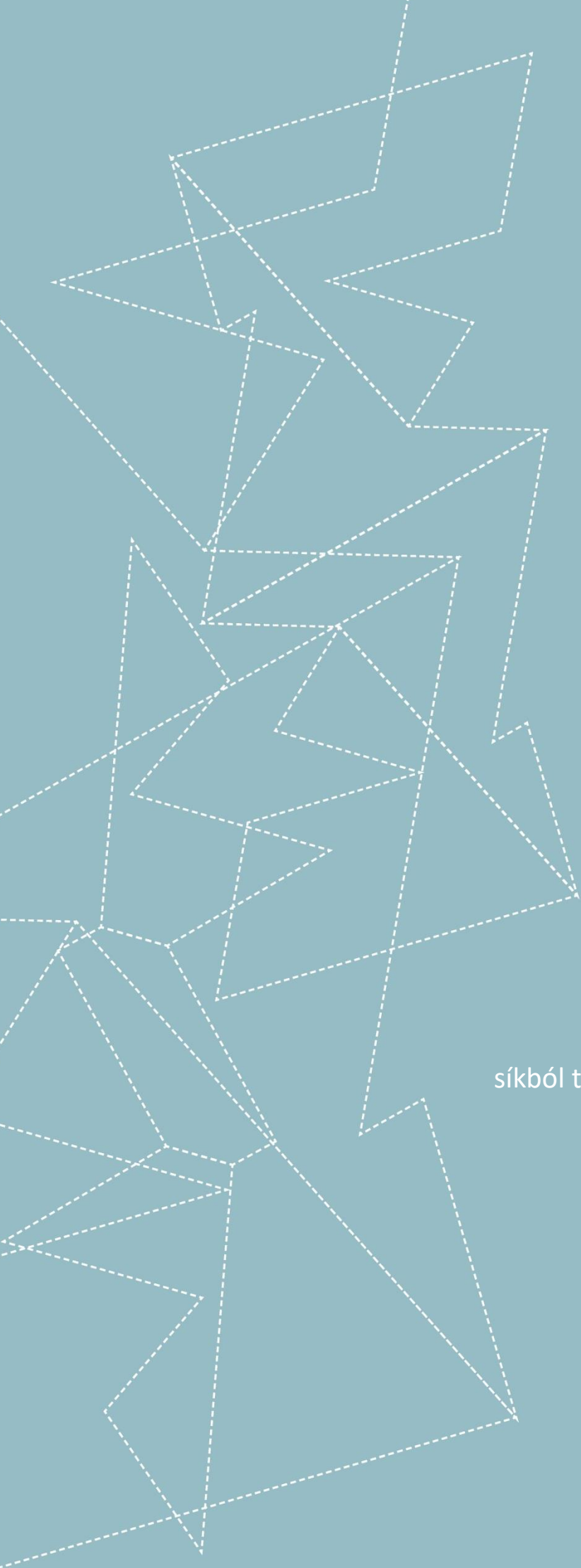
2-7. ábra. Szemelvények a jegyzetből

6. Konklúzió

Úgy látjuk, hogy az építészmérnöki osztatlan képzés 4-5. évfolyamán, illetve mesterképzésben megvalósítható a klasszikus differenciálgeometriai alapismeretek átadása oly módon, hogy a tanultakat a hallgatók azonnal alkalmazni tudják a tervezői munkájuk során. A hallgatók által készített önálló munkák arról árulkodnak, hogy jól hasznosítható differenciálgeometriai tudásra tettek szert. A tantárgyról fél évvel később egy nyomon követő kérdőív készült, amelyet a hallgatók önkéntesen tölthettek ki. Ezen munkák és a kérdőív tapasztalatait egy következő cikkben elemezzük ki.

Irodalomjegyzék

- [1] Lastra, A., (2021). *Parametric Geometry of Curves and Surfaces*, 1st ed., Bazel, Birkhäuser.
- [2] Kozma, L., Kovács, Z., (2011). *Görbék és felületek elemi differenciálgeometriája*, 1. kiadás, Debrecen – Nyíregyháza, elektronikus tankönyv. <https://docplayer.hu/23789719-Gorbek-es-feluletek-elemi-differencialgeometriaja-kozma-laszlo-kovacs-zoltan.html>
- [3] Lőrincz, P., Petrich, G., (2003). *Ábrázoló geometria*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó Zrt.,
- [4] Pék, J., Strommer, L., (2019). *Ábrázoló geometria*, Budapest, Budapesti Műszaki Egyetem, elektronikus tankönyv. http://www.epab.bme.hu/pekjoh/docs/Pek_Strommer_Abr_geom.pdf
- [5] Pék, J., *Ábrázoló geometria*, GeoGebra tankönyv: <https://www.geogebra.org/m/fxjypmny>
- [6] Pék, J.: *Haladó számítógépes geometria*, GeoGebra tankönyv. <https://www.geogebra.org/m/p9esvesa>
- [7] Pottman, H., Asperl, A., Hofer, M., Kilian, A., (2007). *Architectural Geometry*, 1st ed., USA, Bentley Institute Press.
- [8] Strommer, Gy., (1974). *Ábrázoló geometria*, Budapest, Tankönyvkiadó Vállalat.
- [9] Szőkefalvi-Nagy Gy., Gehér L., Nagy P., (1979). *Differenciálgeometria*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.



Hajtogatásminták:
síkból térbe – műszaki alkalmazások

NAGY MÁTÉ

Hajtogatásminták: síkból térbe – műszaki alkalmazások

NAGY Máté

Soproni Egyetem Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Kreatívipari Intézet,

email: nagy.mate@uni-sopron.hu

Absztrakt

A hajtogatás ősi technikája a vékony sík lemezek összetett térbeli formákká alakítását teszi lehetővé, új funkciókkal ruházva fel azokat. Legyenek azok felnyíló vagy összecukható tárgyak, mint a legyező vagy a napernyő, a lágy papír merev dobozzá, állvánnyá, papírsárkánnyá, sőt alakváltó tárggyá is formálható. Az origami művészete valójában anyagprogramozás: a papír „tanítása”.

A 20. század elején csupán néhány száz hajtogatásmintát ismertek, mára ez a szám tízezer fölé emelkedett. A hajtogatás kezdetben hagyományos művészeti ágként és kézügyességet fejlesztő játékként terjedt el világszerte. Ugyanakkor hamar felismerték benne a térrel kapcsolatos komplex problémák modellezésének lehetőségét is. A hajtogatás matematikai hátterének feltárása kaput nyitott a magasabb szintű műszaki alkalmazások felé: űrben felnyíló napvitorlák, az élő testben formát öltő orvosi eszközök, alakváltó tárgyak és puhatestű robotok tervezésénél is hajtogatási mintákat használnak inspirációként. Jelen tanulmány a hajtogatásban rejlő műszaki lehetőségeket tárja az olvasó elé, kiemelt figyelemmel az építészet, a bútor- és tárgytervezés területére.

Kulcsszavak: papírhajtogatás, origami, építészet, tervezés, tárgytervezés, design

Folding Techniques: From Plane to Space – Technical Applications

Máté Nagy

Institute of Creative Studies, Faculty of Wood Engineering and Creative Industries

University of Sopron, Sopron, Hungary, email: nagy.mate@uni-sopron.hu

Abstract

The ancient art of paper folding transforms thin, flat sheets into complex three-dimensional shapes, imbuing them with new functionalities. From deployable and collapsible objects, rigid boxes and transformable toys, folding techniques breathe life into simple materials. Origami, in essence, is material programming: the art of "teaching" paper.

While only a few hundred folding patterns were known in the early 20th century, their number has exploded to over ten thousand today. Initially recognized as a traditional art form and developmental game, folding's potential for modelling complex spatial problems was quickly realized. Unveiling the mathematical background of folding unlocked possibilities of advanced engineering applications. Folding patterns now serve as design inspiration for deployable solar sails in space, medical devices self-assembling within the body, shape-shifting objects, and soft robots. This presentation explores the technical possibilities of folding, with a particular focus on its applications in architecture, furniture, and object design.

Keywords: paper folding, origami, architecture, design, object design advanced innovation.

1. A hajtogatás jelentősége

A papír hajtogatása feltehetőleg egyidős a papírral, sőt a hajtogatás jellemző a textil és bőrmegmunkálásra is. Műszaki szempontból különösen figyelemre méltó, hogy további szerkezetek beépítése vagy anyag hozzáadása nélkül vagyunk képesek szilárdítani a lapot, vagy megváltoztatni a mozgását. Origami minták elkészítésével a vékony sík lemezt összetett térbeli formává alakíthatjuk, amivel új feladatokat képes ellátni. Készíthetünk felnyíló vagy összecusukható tárgyakat: legyezőt, napernyőt például. A lágypapírból készíthetünk merev dobozt, állványt, de akár papírsárkányt vagy alakváltó játékot is. Az origami művészete valójában anyagprogramozás: a papír tanítása. A XX. század kezdetén mindössze néhány száz hajtogatásmintát ismertek, mára tízezer fölére becsülik a számukat. Az origami mai népszerűsége jelentős részben Akira Yoshizawa (1911–2005) japán papírművésznek köszönhető. Yoshizawa 1952-ben megjelent Új Origami Művészet című kötetében láthatjuk a papírhajtogatás lejegyzésére szolgáló, diagrafikus képi nyelvet, 1954-ben pedig megalapította a Nemzetközi Origami Központot. A papírhajtogatás, mint hagyományos művészeti ág és kezűgyességet fejlesztő játék terjedt el világszerte, de kezdettől fogva világos, hogy térrel kapcsolatos problémákat is modellezhetünk vele [1].

Az origami azért is kivételes terület, mert alkotóművészek jelölték ki a természettudományos és műszaki kutatás-fejlesztés irányait. Ennek tudatában vettük górcső alá a Soproni Egyetem 2023 őszi projekthét, keretében a papírhajtogatást építész, formatervező valamint tervezőgrafika szakos hallgatókkal. Abból a célból, hogy megismerjük és alkalmazzuk az origamiban rejlő formaképző lehetőségeket, kezdetben klasszikussá vált módszereket követtünk, majd átalakítottuk, tovább fejlesztettük őket. Készültek formatanulmányok, építészeti térkísérletek, alakváltó tárgyak előképei, és autonóm papírplasztika alkotások, amihez irodalmi inspirációkat követtünk (1. ábra). Jelen tanulmányhoz kapcsolódó illusztrációkon elsősorban az itt készült munkák láthatók. Másodsorban a 2024. év tavaszi szemeszterében megtartott Design 2, valamint Techné 2. nevű kurzusok során készült munkákat használtam fel (2. ábra).



1. ábra. Kollár Enikő: Papírplasztika, (2023 őszi projekthét)



2. ábra. Tájmel Csenge: Kétfázisú csomagolás modellje (2024, Design 2)

Mivel az origamival létrehozott formák a papír mellet további anyagokból is elkészíthetők, a hajtogatás tanulmányozása számos műszaki megoldást ösztönzött. A hajtogatás matematikai alapjainak megértése olyan origami művészekhez kötődik, mint Robert Lang amerikai fizikus, vagy Tomohiro Tachi japán matematikus. Munkásságuk kaput nyit magasabb szintű műszaki kihívások megoldására: űrben felnyíló napvitorlák, az élő testben formát öltő orvosi eszközök, alakváltó tárgyak és puhatestű robotok fejlesztésére használtak már hajtogatási mintákat [2][3].

2. Művészeti és műszaki nevelés

A papírhajtogatás az óvodától az egyetemig jelen van az oktatásban. Gyermekkori képességfejlesztésre már a XIX. században, a formális oktatás hajnalán bevezették a laphajtogatási gyakorlatokat, a térlátás, finom motorikus mozgások és alapvető műszaki gondolkodás elősegítésére. Ezzel demokratizálódott az a tudás, ami kezdetben a főúri kultúra és az értelmiség hivatali szerepvállalásának eszköze volt. Díszes szalvéták gondosan hajtogatott meghívók és iratok, személyes levelek, iratok alakítására fejlődött ki kézműves hagyomány, ami fénykorát élte például a rokokó asztalterítékek között [4].

Japánban az origami szintén főúri és hivatali kultúra részét képezte, majd az Edo korszakban (1603-1868), a papírgyártás tömegesedésével terjed el a közemberek körében. A legősibb irodalmi forrás, az „Az ezer daru hajtogatása” 1797-ből szárazik és Shimokobe Shusuinak tulajdonítják. A hagyomány szerint ezer darumadár meghajtogatása után a készítőnek teljesül egy kívánsága. A papírhajtogatás aztán a Meidzsi-kor oktatási reformjával válik általánossá japánban. Az óvodai és általános iskolai oktatásban kezdik el alkalmazni európai minta szerint, de természetesen, a sajátos hagyományok tükrében. Akira Yoshizawa, a modern origami atyja is így tanulja meg a papírhajtogatás alapjait, hogy aztán később maga is oktatására használja a munkája során, amikor műszaki rajzolókat betanításával bízták meg [5].

A XX. század első feléből ki kell még kiemelnünk Josef Albers munkásságát az európai és nemzetközi modernizmusra gyakorolt hatása miatt. Albers a Bauhaus iskola alapképzésének keretei között oktatott papírplasztikát, így a kor számos kiváló alkotója, tervezője dolgozott a keze alatt. Az ott készült fényképek tanúsága szerint a kurzus nem csak korszerű volt, de meg is haladta a korát. A képeken feltűnik a héjépítészetben éppen csak elterjedő hiperbolikus paraboloid, origami tesszalációk, köztük a Miura-ori és ívelt hajtogatásminták is. Albers tematikája a papírhajtogatással azért is volt különösen időszerű, mert a századelőn elterjedő új ipari anyagok és technológiák hatékony alkalmazása újszerű formálást kívánt, amit a hajtott és hajlított papírral kiválóan modellezhetünk [6].

3. A hajtogatásminták morfogenezise

A papír különösen kis keresztmetszetű, rostokból felépülő mesterséges anyag, megmunkálása történeti szempontból előzmény nélküli, kivételt talán a textil és bőr hajtogatása jelenthet. Tervezési analógiákat mégis találunk az élő természetben, hiszen több vékony, rostokból felépülő állati és növényi szerv is hordoz olyan szerkezeti mintázatokat, ami az origami eszközeivel jól modellezhető. Amikor egy szitakötő imágó állapotban elhagyja a bábót, a szárnyai összehajtott állapotban helyezkednek el a testén. Az imágó kezdetben röpképtelenül várja, hogy a szárnyak felnyíljanak, hogy első alkalommal a levegőbe emelkedhessen. A szitakötő üreges szárnyereinek jellegzetes mintázata egybeesik a szárnyak hajtáséleivel és a rovar egész életében leolvasható rajtuk a szárny egykori hajtogatási mintázata. Egyes fajoknál megfigyelhetünk egy jellegzetes cikk-cakkos mintázatot is a hajtásélek körül, ami nagy hasonlóságot mutat az úgynevezett Miura-ori hajtogatásmintával. A Miura-ori hajtogatást Koryo Miura japán asztrofizikus találta fel abból a célból, hogy megtervezzen egy úrben kinyíló napvitorlát [7]. A fedeles szárnyú rovarok, például a hétpettyes katicabogár esetében a lágy szárnyak felnyitása és összezárása mindennapos esemény. A rovar repülés előtt széttárja a kemény szárnyfedeleket és felnyitja a hártyás szárnyat, leszállás után pedig összecsukja, majd ráhajtja a szárnyfedeleket. A szárny erezetéről szintén jól leolvasható a hajtogatási mintázat [8]. Akár a rovarszárnyak kinetikus szerkezetét vizsgáljuk akár különféle levélerezeteket, ahol a hajtásél a levél, mint konzolos kiállású lemez merevítését szolgálja, de ezek a mintázatok biológiai önszerveződés során keletkeznek. Valójában tehát, irányított gyűrődésekről van szó, de hogyan tud egy bonyolult, funkcionális szerkezet keletkezni?

A Yoshimura féle minta egy háromszögekből álló hajtogatásminta, ami a nevét Yoshimaru Yoshimura japán matematikusról kapta, aki magyarázatot adott a kialakulására vékony falú hengeres testeken nyomóerő hatására. Ennek ismeretében elvégeztünk egy egyszerű roncsolásos kísérletet szabályos geometriai testeken: kockán, hengeren és kúpon. Egyenletes terhelésnek vetettük alá a testeket és megvizsgáltuk, hogy a roncsolási mintázatot. A legtöbb esetben szabályos testből kiindulva valamilyen szabályos hajtogatásmintát kaptunk (3. ábra).



3. ábra. Roncsolással létrehozott mintázatok, 2024, Fotó: a szerző

4. Tudományos kutatás és műszaki újítások

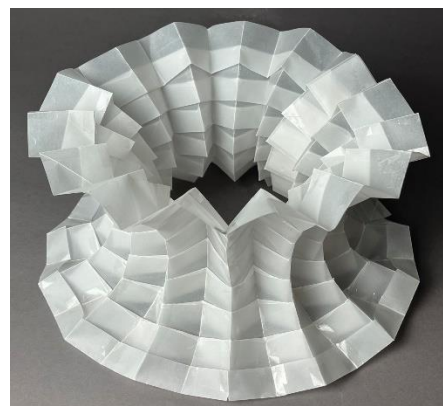
Origamival összefüggő kutatások és innovációk jelen vannak a természettudományokban és az iparban is. Az 1960-as évek végén jelentek meg Shuzo Fujimoto munkái, síkkitöltő mintázatok (4-5. ábra) és szabályos mértani testek kihajtogatásáról, ami lehetőséget teremt a laphajtogatások közvetlen matematikai modellezésére, ezzel kapcsolatot teremtve alap és alkalmazott kutatásokkal [9].

A hazai műszaki irodalomban Pelikán József *Szerkezettervezés* című könyvében (1970) hívja fel a figyelmet az egyirányú lemezművek állékonyságát elemezve, hogy a vasbeton héjépítéssel egyes elgondolásai egyetlen lapból kihajtogatva remekül „modellírozhatóak”. Bár felhívja a figyelmet a síkbafejtehetőség szilárdságtani hátrányára, vagyis, hogy erőhatásra kinyílhat, ezért támasztó felületeket vagy diafragmák beépítését javasolja. Pelikán külön kitér az egyenlő szárú háromszögekkel felosztott lapból modellezhető lemezre: *„A hajtogatással származtatott lemez is kellő merevségű lehet, ha háromszögei nem túl tompaszögűek. Például az ugyanazon körbe szerkesztett szabályos hatszög és szabályos háromszög oldalaiából szerkesztett háromszögű hálózat már elég merev lemezűvé képezhető ki.”* Az ilyen vasbetonból, fémlapból vagy akár fatáblából megépíthető építészeti formák jellemzően sorolható, vagy síkkitöltő origami mintázatokhoz állnak a legközelebb (7. ábra) [10].

A legismertebb kutató, aki egyben origami művész is Robert Lang fizikus, aki több könyvet is szerzett a témában és műszaki kihívások megoldására használja az origami tudását, dolgozott például a NASA megbízásából is. Lang kidolgozott egy módszert hatogató minták tervezésére, amihez gráfot használ. Az ábrázolni kívánt figuráról pálcika diagramot készítünk, ami alapján Lang szoftvere elkészíti a kiterített hajtogatásmintát. Hogyha a pálcikamodell (gráf) nem felel meg egy probléma modellezéséhez, akkor háromszögekre bontott általános felületekből is generálhatunk hajtogatásmintát, a japán matematikus, Tomohiro Tachi módszerével, aki origami tesszalációkból kiinduló megoldást alkalmaz erre a célra [11][12].



4. ábra. Horváth Marcell: kinetikus világító felület modellje, (2023 őszi projekthét)

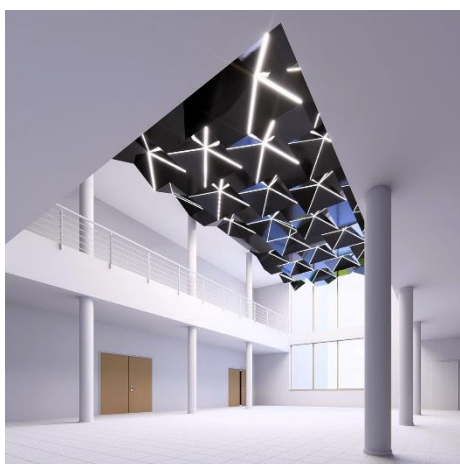


5. ábra. Nagyfi Luca: Folytonos forgó mozgásra képes minta. (2023 őszi projekthét)

A hajtogatásminták műszaki alkalmazásai több csoportra bonthatók: merevítés (7. ábra), különféle alakváltozások (6. ábra), mozgó alkatrészek és funkcionális formaadás. A laphajtogatás, mint tervezési analógia következhet az alapanyagból is, különféle lemezművek esetében, de hogyha egy működő alkatrészt tudunk kiváltani hajtogatott megoldással, akkor a kötőelemek számát, és végső soron az alkatrész méretét és tömegét csökkenthetjük. Az alakváltó szerkezetek közül a legnépszerűbbek a felnyíló tulajdonságúak, a „mail design” lehetősége miatt, de különösen figyelemre méltóak a folytonos forgómozgásra képes minták is [13][14][15].

5. Összefoglaló

A papír hajtogatásának ősi kézműves hagyománya, amit a nemzetközi szakirodalom a japán eredetű origami néven ismer, szerteágazó kapcsolatban áll a legmagasabb színvonalú alkalmazott és alapkutatásokkal. Sajátossága, hogy alkotóművészek aktívan vettek és vesznek részt a természettudományos kutatásban és műszaki kutatás-fejlesztési folyamatokban, vagyis nem a technológiai és tudományos eredmények művészeti transzferéről van szó. Ez annak köszönhető, hogy az origami kiválóan alkalmas komplex térbeli problémák elemzésére, és matematikai módszerekkel jól modellezhető, diszkrét elemekre osztható rendszert hoz létre. A hajtásélek a papírban szingularitást hoznak létre, amivel a lap a szó legszorosabb értelmében magasabb dimenzióba lép át. A térbeliség mellett pedig szilárdság és mozgás lehetősége is megnyílik. Éppen ezért az alkalmazási terület az orvostudománytól az építészetten át a tárgytervezésig roppant széles körű. A napjainkban népszerű szintetikus anyagok, műanyagok, fémlemezok, fa és fa alapú kompozitok, kerámia és biokompozitok pedig tovább fokozzák a speciális lemezművek fejlesztése iránti igényt, aminek az origami kiváló modellező eszköze. Az origami ismerete ezért javára válik bármilyen műszaki, tervezőművész vagy további kreatív szakembernek, akinek térrel, tömeggel, mozgással vagy szilárdsággal kapcsolatos kihívásoknak kell megfelelnie.



6. ábra. Gyémánt Ádám, Deme Kevin, Horváth Marcell: kinetikus világító felület látványterve (2023 őszi projekthét)



7. ábra. Hunyadi István: építészeti térkísérlet (2023 őszi projekthét)

Köszönetnyilvánítás

A 2023-as őszi Origami workshopon résztvevő hallgatók: Belme Bernadett, Bontovics András Kristóf, Deme Kevin Szabolcs, Gergely Vivien Alexandra, Gyémánt Ádám Dániel, Horváth Marcell, Hunyadi István, Kálmán Tímea, Knapecz Máté, Kollár Enikő, Lepold Eszter, Nagyfi Luca, Nagy Nikolett, Nyári Katica, Pató Fanni Alexandra, Szakács Kitti, Szendi Dorina, Utasi Janka Mirella, Varga Laura. A 2014. év tavaszi szemeszterében megtartott Design 2 tantárgy oktatója Polyák János docens és Kedves Emerencia doktorandusz, valamint e sorok írója voltak. Rajtuk kívül Üveges Péter konzulensként vett részt a munkában. A tantárgy a Kreatívipari Intézet első éves formatervező BA és ipari termék és formatervezőmérnök BSc szakos hallgatói vettek részt. A cikkben bemutatott fotókat az alkotók készítették, a felhasználásuk engedélyezett.

Jelen kutatás a 2024-2.1.1-EKÖP-2024-00007 számú projekt a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a EKÖP-24-4-II pályázati projekt finanszírozásában valósult meg.

Irodalomjegyzék

- [1] Yoshizawa, A. (2016). *Akira Yoshizawa, Japan's Greatest Origami Master: Featuring over 60 Models and 1000 Diagrams by the Master*, USA, Tuttle Publishing.
- [2] Lang, R. J. (2011). *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art*, Second Edition. Egyesült Királyság: Taylor & Francis.
<https://books.google.hu/books?id=6bhEatCuWgC&lpg=PP1&hl=hu&pg=PA4#v=onepage&q&f=false>
- [3] Tachi, T. (2019). Introduction to Structural Origami. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 60(1), 7–18.
<https://doi.org/https://doi.org/10.20898/j.iass.2019.199.004>
- [4] Brosterman & Norman (1997). *Inventing Kindergarten*. Harry N. Abrams, New York.
- [5] Shimokōbe Shūsui (1797). *A Thousand Cranes and How to Fold Them*, Woodblock printed book; ink on paper 15.8 × 11 cm, The Metropolitan Museum of Art, Nr. 2013.824.
- [6] Wingler, H. M. (1969). *The Bauhaus* (p. 625). Cambridge, Mass: mit Press.
- [7] Nishiyama, Y. (2012). Miura Folding: Applying Origami to Space Exploration. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 79. No. 2.
- [8] Saito, K., Nomura, S., Yamamoto, S., Niyama, R., & Okabe, Y. (2017). Investigation of hindwing folding in ladybird beetles by artificial elytron transplantation and microcomputed tomography. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114.
<https://doi.org/10.1073/pnas.1620612114>
- [9] Abate, M. (2020). *Geometric Origami*. In: Emmer, M., Abate, M. (eds) *Imagine Math 7*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42653-8_8
- [10] Pelikán, J. (1970). *Szerkezettervezés*. Budapest, Műszaki Könyvkiadó.
- [11] Lang, R. J. (1994). Mathematical algorithms for origami design. *Symmetry: Culture and Science*, 5(2), 115-152.
- [12] Tachi, T. (2013). Designing freeform origami tessellations by generalizing Resch's patterns. *Journal of mechanical design*, 135(11), 111006.
- [13] Kenney, K. L. (2020). *Folding Tech: Using Origami and Nature to Revolutionize Technology*. Lerner Publishing Group. <https://books.google.hu/books?id=h-zuDwAAQBAJ>
- [14] Stitic, Andrea; Robeller, Christopher; Weinand, Y. (2015). Timber Folded Plate Structures – Folded Form Analysis. *IABSE Conference Elegance of Structures, Nara, Japan*, 76–77.
<https://doi.org/https://doi.org/10.2749/222137815815774043>
- [15] Walker, A., & Stankovic, T. (2022). Algorithmic design of origami mechanisms and tessellations. *Communications Materials*, 3(1), 1–8. <https://doi.org/10.1038/s43246-022-00227-5>



Geometriai problémamegoldás és a szakképzés

NAGYNÉ KONDOR RITA

Geometriai problémamegoldás és a szakképzés

NAGYNÉ KONDOR Rita

Debreceni Egyetem Műszaki Kar, Műszaki Alaptárgyi Tanszék,
email: rita@eng.unideb.hu

Absztrakt

Debreceni Egyetem Műszaki Karán működő Mérnökstanári szakon a képzés öt specializáción, kooperatív formában folyik. A kooperatív képzési forma azt jelenti, hogy a képzésben résztvevő vállalati szakemberek a korszerű szakmai tudásukkal oktatják a jövő mérnökstanárait, így egészítik ki az egyetemi képzést. Számos kutatás igazolta, hogy a térszemlélet és a geometriai problémamegoldás kulcsfontosságú a természettudományok, a technológia, a mérnöktanomány és a matematika (STEM) tanulása, megértése során. A műszaki szakképzésben és a felsőoktatásban is szükség van e képességre. Jelen írásban beszámolunk arról, hogy a Debreceni Egyetem Mérnökstanári képzés hallgatói milyen feladatokat alkalmaztak a szakképző iskolákban folytatott tanítási gyakorlataik során, milyen feladattípusokkal fejlesztették a térszemléletet.

Kulcsszavak: Műszaki oktatás, Problémamegoldás, Szakképzés, Tanárképzés

Geometric Problem Solving and Vocational Training

Rita Nagyné Kondor

*Department of Basics Studies, Faculty of Engineering, University of Debrecen, Debrecen, Hungary,
email: rita@eng.unideb.hu*

Abstract

University of Debrecen Faculty of Engineering offers Vocational Teacher Training in form of cooperative training, in five specializations. Cooperative form of training means that the company specialists participating in the training teach prospective vocational teachers with timely professional knowledge, thus supplementing the university training. According to studies spatial ability, geometric problem solving are crucial in learning Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM). This ability is needed in vocational training and higher education. This report investigated the task types of students at the University of Debrecen, which tasks they used during practical pedagogical training in vocational education and training schools. The task types developed spatial ability.

Keywords: Engineering education, Problem Solving, Vocational Training, Teacher Training

1. Bevezetés

A geometriai problémamegoldás számos tevékenység szempontjából fontos, akár a tanulási kontextusra gondolunk, akár a mindennapi élet során felmerülő feladatokra. Kutatások szerint a térszemlélet és a geometriai problémamegoldás kulcsfontosságú a természettudományok, a technológia, a mérnöktudomány és a matematika (STEM) tanulása, megértése során, a térbeli képesség összefügg a problémamegoldó képességgel [4, 7, 8], a térbeli képesség előrejelzi a matematikai teljesítményt, valamint a tudományos, technológiai és mérnöki szakértelmet [16]. A műszaki szakképzésben és a felsőoktatásban is szükség van e képességekre.

Az oktatóknak komoly pedagógiai kihívást jelent az érettségire épülő szakképzések esetén az elméleti ismeretek és a gyakorlati tudás egyidejű átadása. A műszaki képzésben, szakképzésben rendkívül fontos a diákok kreativitásának fejlesztése is, továbbá a hatékony és modern eszközök beépítése a tanórákba [3, 10, 11], illetve a térszemlélet fejlesztése [7, 18, 19]. Jelen cikk célja a mérnökstanár képzés rövid bemutatása, majd a képzésben résztvevő tanárjelöltek óraterveinek tartalmi elemzése alapján olyan példákat hozni, amelyek a geometriai problémamegoldást, a térszemléletet fejlesztik. E példákat a képzésben részt vevő leendő mérnökstanárok a szakképző iskolákban folytatott tanítási gyakorlat során alkalmazták.

2. Szakmai tanárképzés

A negyedik generációs egyetemek célja az oktatás, kutatás, tudáshasznosítás, a helyi gazdaság tudatos fejlesztése, az oktatók, a kutatók, a hallgatók és a lokális térség inspirálásával, a tudásáramlás biztosításával [6]. Az egyetemek az oktatási és a kutatási alapfeladataikon túl hatást gyakorolhatnak a helyi gazdaságra, hozzájárulhatnak a térség versenyképességének növekedéséhez. A harmadik misszió fogalma folyamatosan bővül [2], mely az innováció, a technológiai- és tudástranszfer, az élethosszon át tartó tanulás, a szakmai képzés és továbbképzés hármasként értelmezhető [12]. A felsőoktatás harmadik missziójának tevékenységi körébe tartozik az együttműködés az ipari szereplőkkel, a vállalatokkal, illetve a vállalkozás és a felsőoktatás közötti humán erőforrás-áramlás is, így az egyetem harmadik missziós feladatának tekintheti a képzési tevékenységéhez kapcsolódóan a felsőfokú oktatásra épülő szakképzési feladatok ellátását is [5].

3. Mérnökstanári szak a Debreceni Egyetemen

A Debreceni Egyetem Műszaki Kar és a Debreceni Szakképzési Centrum együttműködésében 2019-ben három szakirányon indult újra Mérnökstanári mesterképzés. 2023-ban a szakirányok (2020-tól a megnevezés: specializációk) száma ötre bővült:

- Elektrotechnika-elektronika,
- Építő-építészet,
- Gépészet-mechatronika,
- Környezetvédelem-vízgazdálkodás,
- Műszaki-gazdasági.



*1. ábra. Lakóház makettjének megépítése 1. (forrás: [14]
Piri, M. (2023). Óraterv,
Portfólió, Debreceni Egyetem)*

A szakra a jelentkezés feltétele a specializációnak megfelelő mérnöki alap- (BSc) vagy mester (MSc) diploma. 2023. szeptemberétől a 4 féléves képzésen a képzés idő 3 félévre rövidült. Így jelenleg a képzési formák:

- 2 féléves a képzés egyetemi (MSc) mérnöki végzettség esetén,
- 3 féléves a képzés főiskolai (BSc) mérnöki végzettség esetén,
- illetve 2 féléves a képzés azoknak, akik a 3 féléves képzésre jelentkeznek, de legalább 50 hónapot dolgoztak közoktatási intézményben, pedagógus munkakörben.

A leendő mérnökstanárok a gyakorlati képzés során vezetőtanár irányításával folyó iskolai tanítási gyakorlatokon vesznek részt, ahol törekednek arra, hogy változatos tanítási eszközöket és módszereket használjanak, kreatív és konstruktív tanulási légkört teremtsenek [10, 15]. Továbbá folyamatos önreflexióval gyakorolják a saját fejlődés megítélését, az általuk elért eredmények és a célok megvalósulásának nyomon követését, az adott tanórák kapcsán a jövőre vonatkozó fejlesztési tervek, elképzelések és az önfejlesztés irányainak a kidolgozását. Lényeges számukra a szakmai fejlődés aktuális szintjének tudatosítása, annak folyamatos nyomon követése, hogy a tanítási gyakorlat haladásával ő hogyan fejlődött. Fontos, hogy a jelölt reális képet adjon önmagáról, hogy pontosan megfogalmazza azokat a problémákat, amelyekkel gyakorlata során szembesült (akár sikerült azokat megoldania, akár – a próbálkozások ellenére – nem). Illetve a hallgatónak pontosan fel kell tárnia a tanári kompetenciáinak tükrében saját erősségeit és fejlesztendő területeit. Jelen cikk célja a mérnökstanár-képzésben résztvevő tanárjelöltek óraterveinek tartalmi elemzése alapján olyan példákat hozni, amelyek a geometriai problémamegoldást, a térszemléletet fejlesztik [9]. E példákat a képzésben részt vevő leendő mérnökstanárok a szakképző iskolákban folytatott tanítási gyakorlataik során alkalmazták.



2. ábra. Lakóház makettjének megépítése 2. (forrás: [14] Piri, M. (2023). Óraterv, Portfólió, Debreceni Egyetem)

4. Geometriai problémamegoldás

A műszaki képzésben, szakképzésben rendkívül fontos a diákok kreativitásának fejlesztése, hatékony és modern eszközök beépítése a tanórákba [3] és a térszemlélet fejlesztése [7, 8, 18, 19]. Térszemlélet fejlesztés szempontjából is hasznos, ha egy alaprajz tanulmányozása során a diákok egy kezdődő építkezést rendszeres helyszíni látogatással vagy webkamera segítségével végig kísérhetnek, ezáltal megismerhetik milyen körülmények, feltételek szükségesek hozzá. A helyszíni látogatás során, amellett, hogy a diákok megtanulják, hogyan kell egy építési területen közlekedni, viselkedni, fontos szakmai ismeretre tehetnek szert. A tanórán a diákok ezeket a kirándulásokat részletesen feldolgozhatják, illetve számos, irányított kérdésre kereshetik a választ a helyszínen [13]. Például egy kérdés az építkezéshez kapcsolódóan: Organizációs szempontból az építkezéshez kapcsolódó alaprajzon hova helyezné a toronydarut és a közlekedési utakat [13]? A szakképzésben lényeges, hogy a tanulóknak ne csak passzív befogadó szerepük legyen egy-egy tananyagban szereplő rajz, illusztráció tanulmányozásakor, hanem maguk készíthessenek a tananyaghoz kapcsolódó tárgyakat [10]. Az 1. és a 2. ábrán egy lakóház modellezése történt kartonból, adott alaprajzra. E tanóra célja a térszemlélet és a szakmai gondolkodásmód fejlesztése, illetve a motorikus képességek fejlesztése [14]. További, a tanítási gyakorlaton szereplő feladat a diákok által CAD programmal tervezett épületről makett készítése, melynek eredményeit a 3. ábra mutatja. Az épületet szabadon választott kivitelezési technikával kell összeállítani (felhasználható anyagok: műszaki rajzlap, hullámpapír, kartonpapír, stb.) [1].



3. ábra. Saját tervhez makett (forrás: [1] Bíró B. A. (2023). Óraterv, Portfólió, Debreceni Egyetem)

5. Összefoglaló

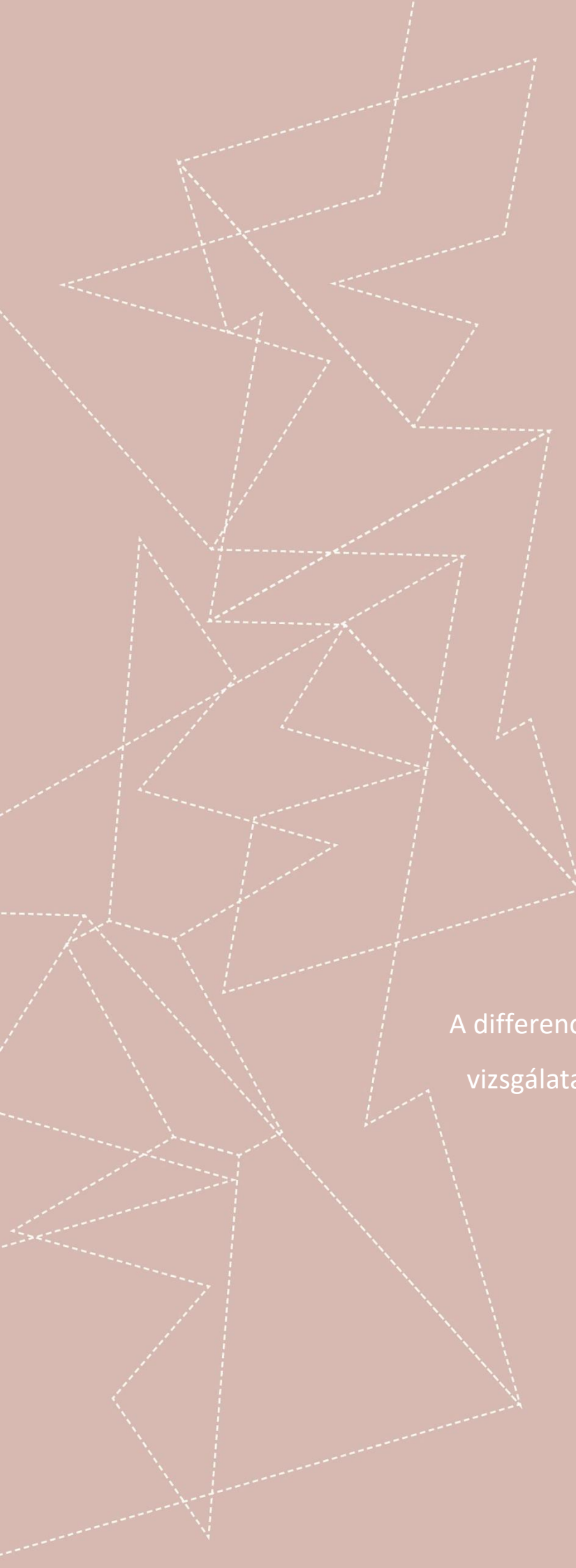
Jelen írással a célunk a mérnökstanár képzés rövid bemutatása, illetve a mérnökstanár-képzésben résztvevő tanárjelöltek óravázlatainak tartalmi elemzése alapján olyan példákat hozni, amelyek a geometriai problémamegoldást, a térszemléletet fejlesztik. A mérnökstanár-képzés hallgatóinak eszköztárából hoztunk példákat, mely példákat a képzésben részt vevők a szakképző iskolákban folytatott tanítási gyakorlataik során alkalmazták.

A mérnökstanár hallgatók a tanítási gyakorlatuk során szem előtt tartották a diákok kreativitásának fejlesztését. A hallgatók a valós élet problémáihoz kapcsolódó gyakorlati feladatokat alkalmazták, segítve a modellalkotást [17], továbbá törekedtek a konstruktív és motiváló tanulási légkör megteremtésére [10] és a változatos módszerek, tanítási eszközök használatára.

Irodalomjegyzék

- [1] Bíró B. A. (2023). *Óraterv, Portfólió*, Debreceni Egyetem.
- [2] Compagnucci, L., & Spigarelli, F. (2020). The Third Mission of the university: A systematic literature review on potentials and constraints. *Technological Forecasting and Social Change*, 161, 120284. <http://doi.org/10.1016/j.techfore.2020.120284>
- [3] Darai, Gy., Filep, G., Nagy-Kondor, R., & Szíki, G. Á. (2015). Dynamics Experiments Applying NI Devices and LabVIEW. *Proceedings of the 3rd International Scientific Conference on Advances in Mechanical Engineering*.
- [4] Duffy G., Sheryl A., & Sorby B. (2024). Exploring the role of spatial ability in the mental representation of word problems in mathematics. *Front. Educ., Sec. STEM Education*, 9. <http://doi.org/10.3389/feduc.2024.1346474>
- [5] Inzelt, A. (2018). A felsőoktatás harmadik missziója. *Valóság*, 61(5), 93–98. https://www.epa.hu/02900/02924/00065/pdf/EPA02924_valosag_2018_05_093-098.pdf
- [6] Lukovics, M., & Zuti, B. (2014). Egyetemek a régiók versenyképességének javításáért: „negyedik generációs” egyetemek? *Tér és Társadalom*, 4, 77–96. <http://doi.org/10.17649/TET.28.4.2587>
- [7] Nagy-Kondor, R. (2024). Spatial Intelligence: Why Do We Measure? *Annales Mathematicae et Informaticae*, 60, 1–9. <http://doi.org/10.33039/ami.2024.03.001>
- [8] Nagy-Kondor, R., & Esmailnia, S. (2022). Development of Spatial Ability Extra Tasks (SAET): Problem Solving with Spatial Intelligence. *Quality & Quantity*, 56, 3751–3768. <http://doi.org/10.1007/s11135-021-01284-7>
- [9] Nagyné Kondor, R. (2024). Geometriai problémamegoldás a szakképzésben, In: Németh, L., Szarka, J. G., Kósa, B., Uhl, G., Vágvölgyi, A., & Horváth, P. G. (2024). *KGK2024 : Konstruktív Geometria Konferencia - (absztrakt kötet)*. (L. Németh, J. G. Szarka, B. Kósa, G. Uhl, A. Vágvölgyi, & P. G. Horváth, Eds.). Sopron: Soproni Egyetem Kiadó. <http://publicatio.uni-sopron.hu/3207/>
- [10] Nagyné Kondor, R. (2024). Mérnökstanár-képzés – Modellalkotás, szakmai szókincsfejlesztés, tantárgyi kapcsolatok. *International Journal of Engineering and Management Sciences*, 9(2), 61–71. <http://doi.org/10.21791/IJEMS.2024.016>
- [11] Nagyné Kondor, R. (2024). USR, Szakképzés, Szakmai Pedagógusképzés. *Gradus*, 11(3), 1–6. <http://doi.org/10.47833/2024.3.ART.005>

- [12] Pérez, S. E., & Erdős, K. (2021). Az egyetemek szerepe az intelligens szakosodásban, különös tekintettel a Pécsi Tudományegyetemre. In: Varga, A. (szerk.): *Regionális innováció, vállalkozás és gazdasági növekedés*. Pécs: Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kara. 238–248. <https://digitalia.lib.pte.hu/hu/varga-attila-regionalis-innovacio-vallalkozas-pte-ktk-pecs-2021-5079#page/241/mode/1up>
- [13] Piri, M. (2023). *Az oktatás és a piac kapcsolata az építőiparban*, Diplomadolgozat, Debreceni Egyetem.
- [14] Piri, M. (2023). *Óraterv, Portfólió*, Debreceni Egyetem.
- [15] Szanyi, Gy., Nagyné Kondor, R., & Sipos D. (2019). *Módszertani gyakorlatok a mérnökképzésben*, DE MK.
- [16] Tosto, M. G., Hanscombe, K. B., Haworth, C. M.A., Davis, O. S. P., Petrill, S. A., Dale, P. S., Malykh, S., Plomin, R., & Kovas, Y. (2014). Why do spatial abilities predict mathematical performance? *Developmental Science*, 17(3), 462–470. <https://doi.org/10.1111/desc.12138>
- [17] Tóth B. (2013). Modellezési kompetencia és modellezési lépések. Esettanulmány egy nyolcosztályos gimnázium tanulóiról, *ELTE TTK, Budapest*, TDK dolgozat. https://tktanar.elte.hu/wp-content/uploads/sites/5/2015/10/Toth_Bettina-Modellezesi_kompetencia_es_modellezesi_lepesek.pdf
- [18] Tóth, P. (2016). Az osztálytermi tanítás oktatástechnikája és oktatástechnológiája, *Szakmai Pedagógusképzés Sorozat*, Typotop Kft., Budapest.
- [19] Turgut, M., & Nagy-Kondor, R. (2013). Comparison of Hungarian and Turkish prospective mathematics teachers' Mental Cutting performances, *Acta Didactica Universitatis Comeniana*, 13.



A differenciálgeometriai tudás fejlődésének
vizsgálata építészmérnök hallgatók esetén

PÉK JOHANNA

A differenciálgeometriai tudás fejlődésének vizsgálata építészmérnök hallgatók esetében

PÉK Johanna

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építészmérnöki Kar,
email: pek.johanna@epk.bme.hu

Absztrakt

Ebben a cikkben elsősorban a differenciálgeometriát alapfokon megismerő építészmérnök hallgatók munkáit elemezzük. Az elemzés során megpróbáljuk részletesen bemutatni a hallgatók fejlődését a projektmunkáik felhasználásával. Ez a kutatás „A differenciálgeometria egy lehetséges oktatási módja az építészmérnök képzésben” című cikkem alapul [1], és az ott ismertetett tantárgy tapasztalatait mutatja be.

Kulcsszavak: differenciálgeometria, építészet, oktatásmódszertan, GeoGebra

A research of the development of differential geometry knowledge in the case of architectural engineering students

Johanna Pék

*Budapest University of Technology and Economics, Faculty of Architecture, Budapest, Hungary,
email: pek.johanna@epk.bme.hu*

Abstract

In this article we analyse the works of architectural engineering students who learn differential geometry at the basic level. During the analysis, we try to present the students' progress in detail using their project works. This research is based on the article "A Possible Way of Teaching Differential Geometry in Architectural Engineering Program" [1] and presents the experiences of the course described there.

Keywords: differential geometry, architecture, teaching methods, GeoGebra

1. Bevezetés

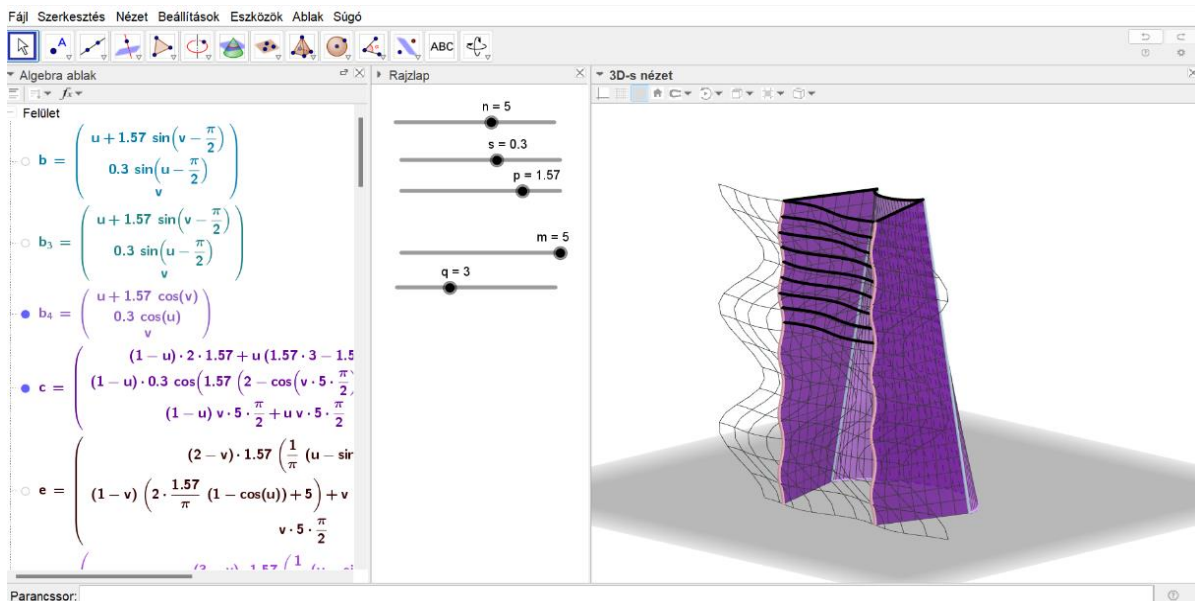
A nem leendő matematikusoknak vagy matematikatanároknak szóló kurzusok nehézsége mindig az, hogy megtaláljuk az ideális egyensúlyt a matematikai precizitás és az ismeretek elsajátíthatósága között. A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építészmérnöki Karán, 2024 őszén elindult egy tantárgy Haladó számítógépes geometria címmel. Ebben 4-5. éves építészmérnök hallgatók kapnak differenciálgeometriai ismereteket, amelyeket – reményeink szerint – a későbbi parametrikus tervezési problémáikban sikerekké alkalmazhatnak. A tantárgyhoz tartozó GeoGebra-fájlok nyilvánosak [2], a jegyzet a zárt Moodle-rendszerből érhető el a hallgatók számára. (A kurzusról bővebben „A differenciálgeometria egy lehetséges oktatási módja az építészmérnök képzésben” [1] cikkben írtunk.) A tantárgyban a zárthelyik mellett projektfeladatot is be kellett adniuk a hallgatóknak. Bár a zárthelyi dolgozatok klasszikusan jól mérik a tudást, a valódi alkalmazási képesség egy otthon elkészített projekt munkában mutatkozik meg igazán, ahol a hallgatónak van ideje a kutatásra, elmélyedésre és az ötleteinek kreatív kibontakoztatására. Ezért ebben a cikkben ezekből a projekt munkákból mutatunk meg néhány tanulságos példát. A cikk végén röviden összefoglaljuk, hogy a hallgatók hogyan értékelték ezt a tantárgyat, milyen benyomásaik voltak, milyen változtatásokat szeretnének látni.

2. Néhány hallgatói projektfeladat részletes elemzése

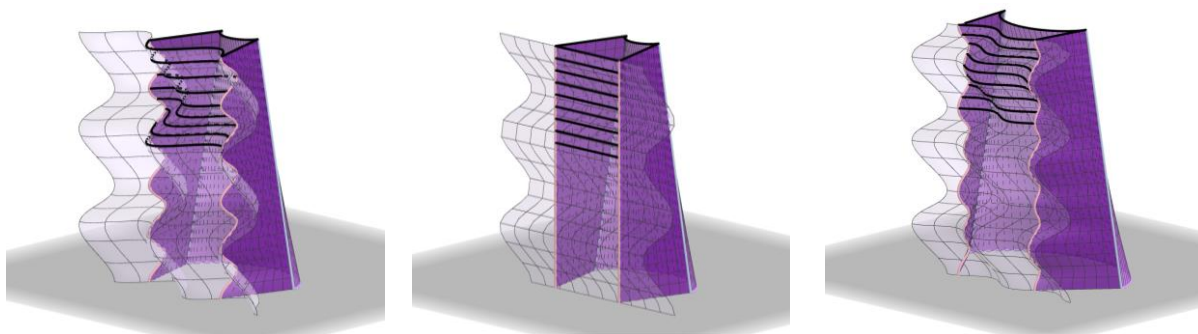
A következőkben három projektfeladatot elemzünk. A féléves projektfeladatban a hallgatóknak önállóan kellett egy már létező vagy kitalált épületet megtervezni – itt pusztán a geometriai tudást és kreativitást használva, azaz nem kellett vizsgálniuk azt, hogy egy kitalált épület esetén a terv megvalósítható-e. (Az esetek nagyobb részében a beadott projektben egy már létező épület elemzése és reprodukálása szerepelt.) A projektfeladatban a GeoGebra-fájlok mellé az azokhoz tartozó számolásokat, levezetések is csatolni kellett – ennek elmaradása, illetve a GeoGebra-ban történő „próbálgatás” esetén egy adott részpont levonásra került. A hallgatók anonimitását megőrizve, a munkáik kézírásos részét szűrő felhasználásával tesszük közzé. Bemutatjuk továbbá a GeoGebra-ban készült munkákat képernyőképekkel, az Algebra ablakokat is felfedve. Mindhárom eset más szempontból tanulságos, és mindegyikben tisztán látható a hallgató szakmai fejlődése. *(Megjegyzés: A cikkben felhasznált hallgatói munkák bemutatása a hallgatók beleegyezésével történt.)*

2.1. Példa a paraméterek és paramétertartományok rugalmas alkalmazására

Az első példában a Tróia Design Hotel (Tróia, Portugália, [3]) „hullámzó” homlokzati része keltette fel a hallgató érdeklődését. Oktatóként azonban rögtön megfigyelhető, hogy összesen négy felület egymáshoz csatlakoztatását láthatjuk: a hullámzó hatásért felelős homlokzat mellett egyszerű, két görbét összekötő vonalfelületeket is felfedezhetünk. Mivel ezen görbékkel keletkeztek a felületek, ezért az illesztés triviálisan adódott. A homlokzati rész translációs felületként állt elő. Ami igazán figyelemreméltó ebben a példában az az, hogy a hallgató nem csupán az adott felületek paramétertartományainak helyes megválasztására figyelt, hanem mind a négy felületet szabad paraméterekkel látta el. Az így kapott eredmény pedig egy minden ízében változtatható felületcsoport lett – ez a gondolkodásmód az igazi kulcs ahhoz, hogy a későbbiekben a hallgató a parametrikus tervezésben ki tudjon teljesedni. Az épület felsőbb szintjeihez tartozó néhány, külön kiemelt görbe egyszerűnek tűnhet, de a paramétertartományok megválasztása számolásigényes; ez pedig a hallgató valódi differenciálgeometriai fejlődéséről árulkodik – sikeresen elsajátította a kívánt analitikus szemléletet.

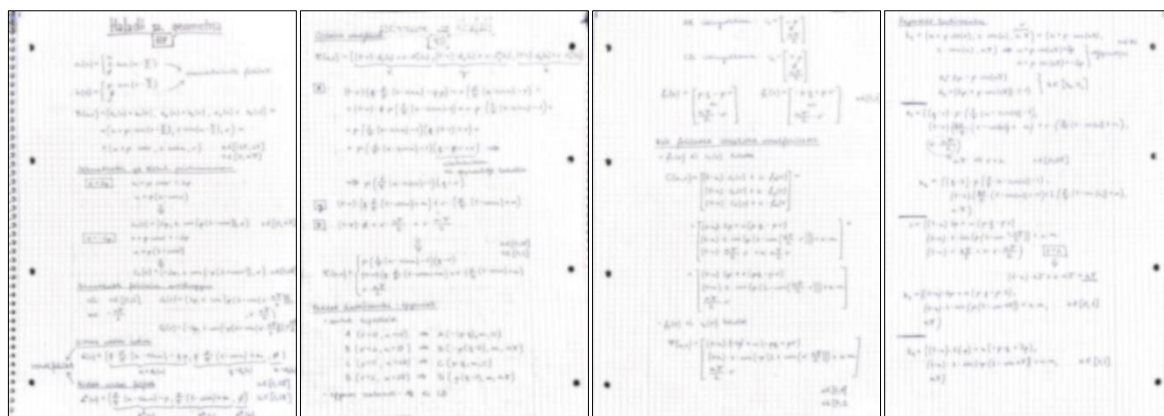


1. ábra. Példa a paraméterek rugalmas változtatására 1



2-4. ábra. Példa a paraméterek rugalmas változtatására 2

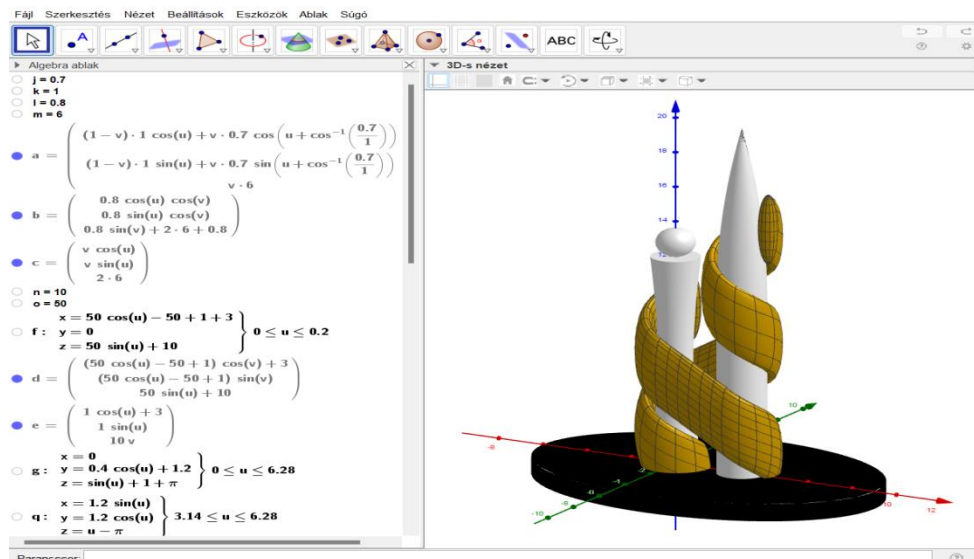
Ahogy az alfejezet bevezetőjében említettük, a projektekhez számolásokat, levezetéseket kellett csatolni – az alábbiakban mintaképpen bemutatjuk a feladat megoldásához benyújtott, igen alapos háttérszámításokat.



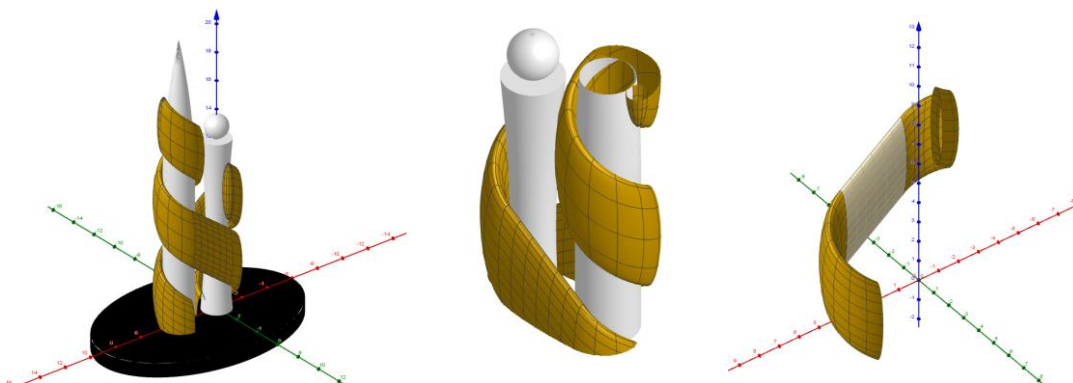
5-8. ábra. Az előző példához tartozó levezetések 1-4

2.2. Példa a formaelemzési képesség fejlődésére

A második példában a hallgató egy, az interneten talált, képzeletbeli épületegyüttest próbált rekonstruálni. Bár maga az épület nem létezik, annak tervezője nem azonosítható egyértelműen, azonban a hallgató olyan nagy pontossággal elemezte és alkotta újra az épületegyüttest, hogy a 9. ábra jobb oldalán lévő eredményre közelítve a Google Lens felismeri az ihletet adó képet. (Az eredeti kép éjszakai körülmények között ábrázolja az épületet, amely megnehezítheti a felismerést.) A kapott eredményhez tartozott némi számolás, amelyet a hallgató a fájljához nem csatolt, így azt nélkülözve mutatjuk be a feladatát. A végső formát az Algebra ablakban jól látható futó paraméterek adták. Ez azt jelenti, hogy a diák nagyon szépen el tudta különíteni a felületek paramétertartományait és a felület formálásához szükséges paramétereket. Komoly munkát igényelt a csavarodó formák összeillesztése; itt – kis hibákkal, de nagyon ötletesen – translációs- és csavarfelületek együtteséből állt elő a végső alakzat. A két középső toronyrész elemei egyszerű forgásfelületekként leírhatók. Vegyük észre, hogy a hallgató kifejezetten ügyelt a részletgazdagságra, így az egyszerű kör- vagy ellipszislapok sem maradtak ki a munkájából. Összegezve, ezt a projektet készítő hallgató nagyon tudatosan analizálta egyetlen(!) kép alapján a látott épületet, ami meglehetősen erős formaelemzési képességet igazol.



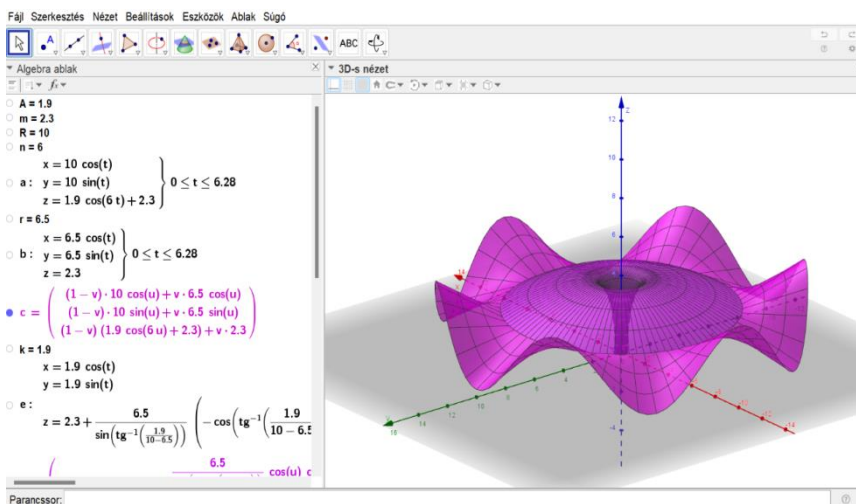
9. ábra. Példa formaelemzésre 1



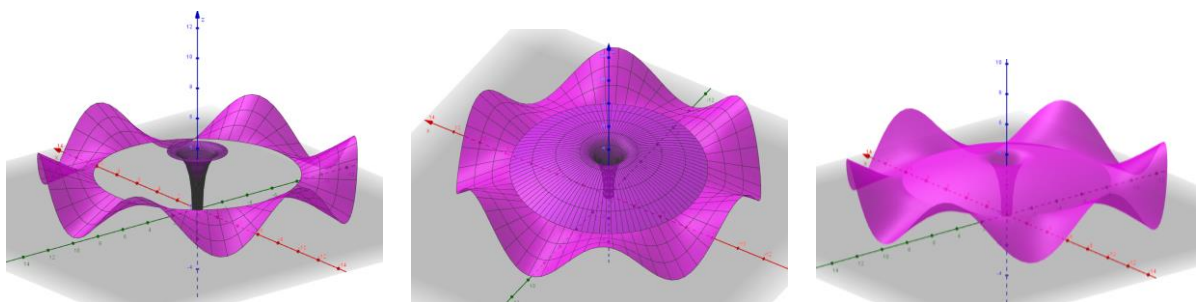
10-12. ábra. Példa formaelemzésre 2

2.3. Példa a felületek csatlakoztatására

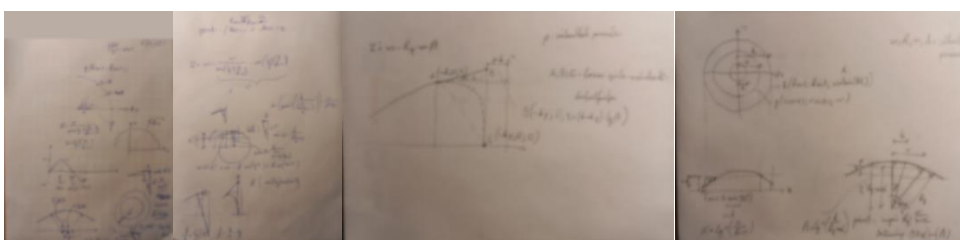
A harmadik példa szép bizonyíték arra, hogy mindössze egyetlen féléves, 2+1 órás tantárggyal milyen erős differenciálgeometriai érzékenység fejleszthető ki. A hallgató az egyik parametrikus tervezéssel foglalkozó weboldalon látható modellt, mint felületet vette alapul [4]. Az ott található modell belső tölcészerű része csupán egy egyszerű hengerfelület. A hallgató azonban a projektfeladatában három felületet illesztett össze úgy, hogy a két belső felület simán csatlakozik a közös kör minden pontjában, a külső felületnek periodikusan szintén van közös érintősíkja a köztes felülettel. Ahhoz, hogy a kívánt modell „összeálljon”, a diáknak a forgásfelületek esetében a meridián metszetek közös pontjába húzható közös érintő egyenesére kellett figyelnie – a mellékelt számításaiban ez a geometriai gondolat tisztán megfigyelhető. A külső, hullámszerű részt két görbére írható vonalfelületként írta fel. Ez a felülettípus igen népszerű volt a beadott munkákban, ami építészhallgatók esetében érthető. Itt is leírható az, mint az előző két bemutatott projektfeladat esetén: a diák elemző látásmódja erőteljesen fejlődött, differenciál- és térgeometriai ismeretei jelentősen bővültek. Meglepő volt az az igény (és igényesség), ahogyan a hallgató a felületek sima csatlakoztatására törekedett. Végül – a lehetőségekhez képest – bemutatjuk a mellékelt háttérszámításokat és rajzokat:



13. ábra. Példa felületek csatlakoztatására 1 (fent)



14-16. ábra. Példa felületek csatlakoztatására 2-4 (középen)



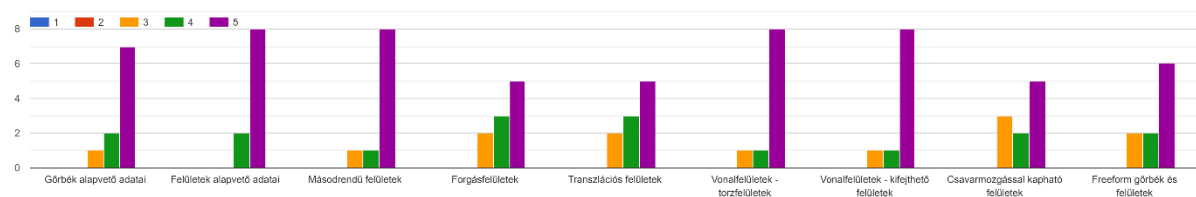
17-20. ábra. Az előző példához tartozó levezetések 1-4

3. Hallgatói visszajelzések

A tantárgyról az elvégzését követően a hallgatók visszajelzést adhattak az Oktatási Hallgatói Véleményezése (későbbiekben OHV) nevű, anonim, egyetemi szintű kérdőív keretein belül. Itt külön lehetett értékelni a tantárgyat és az oktatót is. A 21 hallgatóból 18 fő vett részt aktívan az órákon és a zárthelyiken, a kérdőívet 14 hallgató töltötte ki. Arra a kérdésre, hogy „Értékelj az előadást összességében!” 1-től 6-ig lehetett szavazni; erre 14 db 6-os, 1 db 5-ös és 1 db 4-es értékelés érkezett. A szöveges visszajelzési lehetőséggel nem éltek a hallgatók. Nagyjából fél évvel később egy önkéntes és szintén anonim kérdőív készült, amely már kifejezetten tantárgy specifikus kérdéseket tartalmazott. Erre a kérdőívre 10 fő válaszolt, ami a 18 aktív hallgatónak éppen több, mint 50%-a. Ezen kérdőív lényegesebb kérdései közül elemeznénk néhányat. Az első kérdés a tanult témakörök hasznosságára vonatkozott. Jól sejthető módon a vonalfelületek témaköreit kedvelték a hallgatók. Meglepetés volt, hogy a bevezető, differenciálgeometriai alapokat tárgyaló előadást (Felületek alapvető adatai: felületek leírás módjai, főirányok, főgörbületek, Gauss- és Minkowski-görbület, felületi pontok osztályozása, főbb felülettípusok rendszerezése) – annak kissé száraz, elméleti jellege ellenére – a válaszadók 80%-a nagyon hasznosnak értékelte.

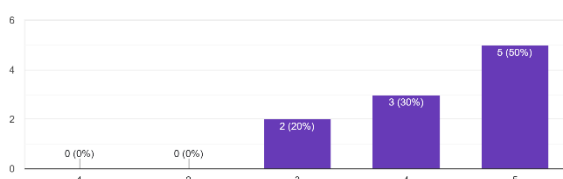
A következő kérdések egyike a tantárgy globális hasznosságára vonatkozott, egy másik pedig a konkrét alkalmazhatóságra kérdezett rá. Ez két, nagyon szorosan összefüggő kérdés. A válaszok – szerencsére – hasznosnak ítélték meg a tantárgyat. Az eredményt némiképpen torzítja az, hogy egy kötelezően választható tantárgyról van szó, amelyet főként az érdeklődő hallgatók vesznek fel. Az alkalmazhatóságra a hallgatók 60%-a adott 4-est az ötfokozatú skálán: ebben az esetben a szöveges visszajelzésekre fókuszáltunk, hogy a későbbiekben a tantárgy jobban illeszkedjen a hallgatói (és esetleges ipari/piaci) igényekhez. Az utolsó két, nem kötelező(!) kérdés szabadszavas válaszokra adott lehetőséget. Örömmel tapasztaltuk, hogy az OHV-val szemben jóval több szöveges válasz érkezett. A következőkben változtatás nélkül közöljük a kapott értékeléseket.

Értékelje 1-től 5-ig, hogy mennyire találta hasznosnak a tantárgy témaköreit! (1 - egyáltalán nem hasznos, 5 - nagyon hasznos)

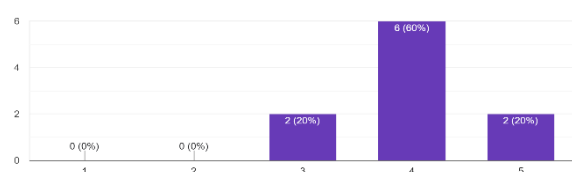


21. ábra. A témakörök hasznosságára vonatkozó válaszok

Össességében mennyire tartotta hasznosnak a tantárgyat?
10 válasz



Mennyire tartja valószínűnek, hogy a szakmai pályafutása során alkalmazni fogja a tantárgy hallgatása során elsajátított tudását?
10 válasz



22. ábra. A tantárgy alkalmazhatóságára vonatkozó válaszok

A „Van-e olyan témakör, amelyről szívesen hallott volna az órákon?” kérdésre adott válaszok:

- Árnyékszerkesztésekről esetleg
- A tanultak alkalmazása a valóságban, releváns szoftverben, nem GeoGebrában.
- Szerintem jó lenne, ha ezekhez a felületekhez valamilyen mechanikai térformálási dolgok is lennének, nyilván ez nem a te feladatod, de jó lenne egy ilyen tárgy pluszban
- Esetleg a tartószerkezeti érdekes, fontos görbék, felületek kicsit bővebben, de ez nem nagy hiányosság
- A GeoGebra használatáról részletesebben (pl. parametrikus tervezéshez csúszkák)
- Jó lett volna többet tanulni a freeform görbékről.
- Rhinoban vagy Archicadben, hogy lehet használni a tanultakat.
- Tartószerkezeti összefüggések - pl. nyomatékmentes héjszerkezetek kialakítása

A „Van-e bármilyen egyéb megjegyzése a tantárggyal kapcsolatban?” kérdésre adott válaszok:

- Nagyon jó tárgy volt!
- Kicsit száraz az elmélet része, a gyakorlati feladatok pedig nem elég motiválóak, ez inkább ilyen ábris 3 tárgyként működik "csak".
- Szerintem több értelme lenne hasonlót tanítani a geometriai modellezés (mostani ábris 2) tárgyon is hasonlót tanítani, mint itt. Vagy legalább érdekességnek ilyen mutatni, mert akkor sokkal többen használnák fel az ilyen tudást a tanulmányaik során (tervezésben) mint a hengeren egy levágott kúp árnyékát perspektívában.
- Elégé elgondolkodtató volt, hogy milyen szép megoldásokkal lehet kilépni a "kockaépületek" világából. :)
- Szerintem, ha több építészeti vonatkozást szeretnénk adni a tárgynak, akkor a rhinograsshopperben is dolgozhatunk. Én azt szeretem.
- Jó volt.
- Jó volt a felépítése, és hogy mindig voltak feladatok az órai anyag végén.

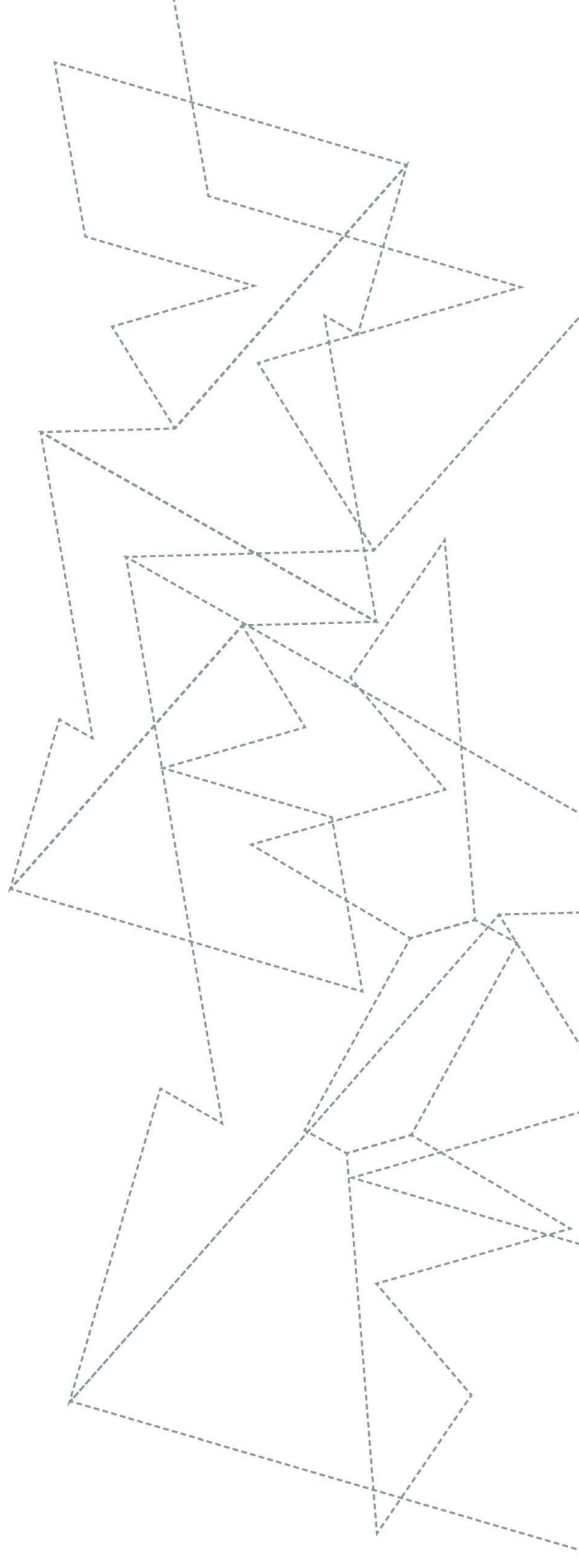
Megjegyezzük, hogy kötelezően választhatóak olyan tantárgyak, amelyek kizárólag a Grasshopper/Rhinoceros programozási nyelvvel és programmal foglalkoznak. Szintén vannak haladó szintű AutoCAD-et, illetve ArchiCAD-et használó tantárgyak a hallgatók számára. Ezért néhány válasz esetén arra következtethetünk, hogy az adott hallgató esetleg felületesen olvashatta el a tantárgy leírását, amely egyértelművé teszi, hogy a félév során hagyományos számításokat végzünk és főként a GeoGebra programot használjuk. A kapott válaszok néha egymásnak teljesen ellentmondó kéréseket tartalmaznak, továbbá nem feltétlenül tetszett mindenkinek a tantárgy, de összességében elégedettséget mutatnak.

4. Konklúzió

Az összegzést a fejlesztési célokkal szeretnénk kezdeni, hiszen a tantárgy természetesen még továbbra sem mondható véglegesnek. A hallgatói (és kollégák által adott) visszajelzések alapján a freeform felületekre a későbbiekben még több időt szeretnénk fordítani: a jelenlegi két hét helyett akár három hétig foglalkozni ezekkel a felületekkel, az elméleti részeket esetleg mélyebben tárgyalva és még több alkalmazási lehetőséget megmutatva. A szabadszavas válaszok pedig olyan irányba mutatnak, ahol felmerülhet egy, a tartószerkezetekkel foglalkozó kollégával közös tantárgy lehetősége. A legfontosabb következtetés azonban az, hogy a tantárgy elérte a célját: érezhető és erőteljes javulást, fejlődést tapasztalhattunk a hallgatók differenciálgeometriai ismereteiben. Ez a tudás ráadásul – a hallgatói képességeknek is köszönhetően – rugalmasan épült be a gondolkodásmódjukba: elegendő csupán a cikkben felhozott három példára gondolni, ahol az egyik hallgató egy valós, a másik egy képzeletbeli épületet tudott rekonstruálni, a harmadik pedig egy puszta makettet fejlesztett tovább (ez utóbbi teljes mértékben differenciálgeometriai elvek mentén). A kapott projektfeladatok sokszínűsége pedig bizonyíték arra, hogy a hallgatók geometriai/differenciálgeometriai szempontból nyitottabbá váltak, – őket idézve – „kiléptek a kockaépületek világából”.

Irodalomjegyzék

- [1] Pék, J. (2024). *A differenciálgeometria egy lehetséges oktatási módja az építészmérnök képzésben*, Konstruktív Geometria KGK 2024 Kiadványkötet, szerk.: Németh László, Sopron, 5-12.
- [2] Pék, J.: *Haladó számítógépes geometria*, GeoGebra tankönyv. (<https://www.geogebra.org/m/p9esvesa>)
- [3] Tróia Design Hotel weboldala. <https://www.troiadesignhotel.com/en/>
- [4] Futurly oktatási platform weboldala. <https://www.futurly.com/blog/what-is-parametric-design-in-architecture>





Geometriai ismeretek szerepe a 3D
modellezésben

PAPP ILDIKÓ

Geometriai ismeretek szerepe a 3D modellezésben

PAPP Ildikó

Debreceni Egyetem, Informatikai Kar,
email: papp.ildiko@inf.unideb.hu

Absztrakt

Ahhoz, hogy egy virtuális környezetben vagy valós gyártási folyamatban 3D objektumok megjelenhessenek, feltétlenül szükséges a kívánalmaknak megfelelő digitális modell elkészítése. Napjainkban sokféle igénynek és elvárásnak megfelelő 3D modellező alkalmazás érhető el, az oktatásban előnyt élveznek azok, melyek ingyenesen elérhetőek. A praktikus és rutinos használathoz rendelkezni kell a megfelelő geometriai ismeretekkel, és az éppen használt design alkalmazás modellezési eszközeinek ismeretével is. Felmerül a kérdés, hogy hogyan tehetjük könnyebbé a tanulás folyamatát, milyen módon motiválhatjuk a hallgatókat. Tapasztalatokat és jó gyakorlatokat mutatok be, úgymint hogyan kapcsolható egy modellezési feladat múzeumpedagógiai foglalkozáshoz vagy hogyan érhetünk el művészi hatást algoritmizálással.

Kulcsszavak: 3D modellezés, geometriai ismeretek, tanulási folyamat, motiváció, jó gyakorlatok

Importance of geometric knowledge in 3D design process

Ildikó Papp

*University of Debrecen, Faculty of Informatics, Debrecen, Hungary,
email: papp.ildiko@inf.unideb.hu*

Abstract

In order for 3D objects to appear in a virtual environment or in a real production process, it is necessary to create a digital model that meets the requirements. Nowadays, many different 3D modelling applications are available that meet a wide variety of needs and expectations. In education, priority is given to those that are freely available. To use an application practically and routinely, it is necessary to have the appropriate geometrical knowledge and practice in the modelling tools of the design application being used. The question arises about how we can make the learning process easier and motivate the students. I will share my experiences and some good practices, such as how a design task can be linked to a museum pedagogic session or how to achieve artistic effects through algorithmic modelling.

Keywords: 3D modelling, geometrical knowledge, learning process, motivation, good practices

1. Bevezetés

Napjainkban elengedhetetlen, hogy a gyártási folyamatok vagy a virtuális térben történő megjelenítések digitális alkotótevékenység nélkül valósuljanak meg. A céloknak, igényeknek, elvárásoknak más-más 3D modellező alkalmazás felelhet meg. A praktikus és rutinos használathoz nem elegendő az alkalmazás modellezési eszközeinek ismerete, rendelkezni kell a megfelelő geometriai ismeretekkel is. Sajnos a geometria, térgeometria témaköre nem tartozik a legnépszerűbb matematikai területek közé, ennek okai nemcsak a kevés ráfordított óraszámban keresendők, hanem a megtanult ismeretek szinte sohasem kerülnek valós környezetben való alkalmazásra. Az informatikus hallgatók képzésében viszonylag későn jelennek meg a komputergrafikai vagy 3D modellezési kurzusok, amelyen a fent említett geometriai tudást más alkalmazói vagy algoritmizálási környezetben igénylik. Így valóban felmerülhet a kérdés, hogy hogyan tehetjük könnyebbé a tanulás folyamatát, milyen módon motiválhatjuk a hallgatókat a geometriai ismereteik ismétlésére vagy mélyítésére. Nemcsak hagyományos kurzusok során találkozhatunk 3D modellezéssel, hanem a látványossága miatt témája lehet szakköröknek, pályaorientációs napoknak, workshopoknak. Ezekhez kapcsolóan osztok meg tapasztalatokat és mutatok be jó gyakorlatokat.

2. Az oktatásban alkalmazható modellező alkalmazások

Az oktatási tevékenységem során főként informatikus – programtervező informatikus BSc, illetve informatikatanár szakos – hallgatóknak tartok bevezető 3D modellezés kurzusokat szabadon választható vagy kötelezően választható formában. A 3D modellezés népszerű a középiskolai pályaorientációs napok, Digitális témahét, Lányok napja, Kutatók éjszakája rendezvényeken, az Informatikai Kar által szervezett szakkörök és nyári táborok során, de voltak workshopjaink fesztiválkörnyezetben (Campus fesztivál, Science on Stage) is. Így a résztvevők nagyon eltérő előismeretekkel rendelkeznek, különböző korosztályba tartoznak és a motivációjuk, kíváncsiságuk is nagyban különbözhet. Egy kurzus előkészítése során közel azonos előképzettségű hallgatóra számítok, de itt a személyes motivációk lehetnek nagyon eltérőek. Vannak, akik csak a kreditszerzésre koncentrálnak, és csak a minimális erőfeszítésre készülnek, számukra is igyekszem érdekes feladatokat adni abban bízva, hogy felkeltem a személyes motivációjukat. Ugyanakkor vannak nagyon érdeklődő hallgatók is, akik hamar képesek középhaladó vagy haladó szintre jutni egy kiválasztott modellező alkalmazás használatában. Alapvetően a modellezési alapok megismerése a cél, amely folyamat során képességeket, készségeket (úgy mint problémamegoldás, részfolyamatokra való bontás, térlátás, algoritmizálás) szeretnék fejleszteni.



1. ábra. Néhány ingyenesen elérhető 3D modellező alkalmazás logója
balról jobbra haladva: Blender, SketchUp, FreeCAD, Onshape, BlocksCAD, TinkerCAD,
OpenSCAD

Egy rendezvény vagy workshop során nem áll rendelkezésre több hónapnyi idő, hogy vezessem az úton a résztvevőket. Ebben az esetben a megfelelő témaválasztás és célirányos instrukciók segíthetnek. Napjainkban sokféle 3D modellező, tervező rendszer áll rendelkezésre, melyek más célterületre fókuszálnak, emiatt más elveken működnek. Az 1. ábrán néhány ingyenesen elérhető, és az oktatásban praktikusan alkalmazható 3D alkalmazás figyelemfelhívó logója látható.

Az oktatási intézmények az ingyenesen elérhetőket részesítik előnyben. Ennek főként gazdasági okai vannak, az intézmények költséget szeretnének megtakarítani, és nem várható el a tanulóktól, hallgatóktól sem, hogy megvásároljanak vagy előfizessenek egy alkalmazásra egy kurzus teljesítése érdekében. Az ingyenesen elérhető alkalmazások, diákverziók alkalmasak a modellezési alapok elsajátítására, az elvek és módszerek megismerésére és gyakorlására, ezen ismeretek könnyen alkalmazhatók más hasonló eleven működő tervezőszoftverben is.

A mi tevékenységeink nem kötődnek ipari alkalmazásokhoz, mérnöki látásmódot igénylő tudáshoz, ugyanakkor nagyon hamar ad vizuális visszacsatolást. A mai egyetemi hallgatók a Z-generációhoz tartoznak, akiket gyakran "*digitális bennszülötteként*" említene; a digitális eszközök és megoldások korában nőttek fel, de valós kreatív tevékenységben elmaradnak a korábbi generációktól. Gyakran a 3D modellezés során találkozunk a méretek, a valódi formák digitalizált verzióit meghatározó geometriai adatok fontosságával, jelentésével. Már nem elegendő kimondani egy megtanult definíciót vagy tételt, hanem alkalmazni kell tudni a sikeres munka érdekében. Erről részletesebben *A 3D modellezéshez szükséges geometriai ismeretek* szakaszban olvashatunk. Az ingyenesen elérhető alkalmazások többféle modellezési elvet követhetnek és különböző céllal készíthetők velük 3D modellek. A Blender egy nyílt forráskódú, program, melyet főként animációs filmek, vizuális effektek, interaktív 3D alkalmazások és videó játékok létrehozására ajánlanak. A SketchUp már közelebb áll a mérnöki tevékenységhez, széles körben alkalmazható az építészet, gépészet területén. 2D-s rajzok könnyen formálhatók 3D modellekké. A FreeCAD és az Onshape parametrikus modellező alkalmazások mérnöki felhasználási területekkel. A modellalkotás folyamata sok rokonságot mutat az iparban nagy népszerűségnek örvendő Solidworks és a Fusion360 rendszerekkel. A BlocksCAD egy felhőalapú modellező program, amely a geometriaformákat kódokkal, kódblokkokkal írja le, ezáltal nemcsak a modellalkotás, hanem az algoritmikus képességek is látványosan fejleszthetők. A TinkerCAD és OpenSCAD alkalmazásokat részletesebben mutatom be, mivel ezekhez köthető jó gyakorlatok az utolsó fejezetben találhatóak.

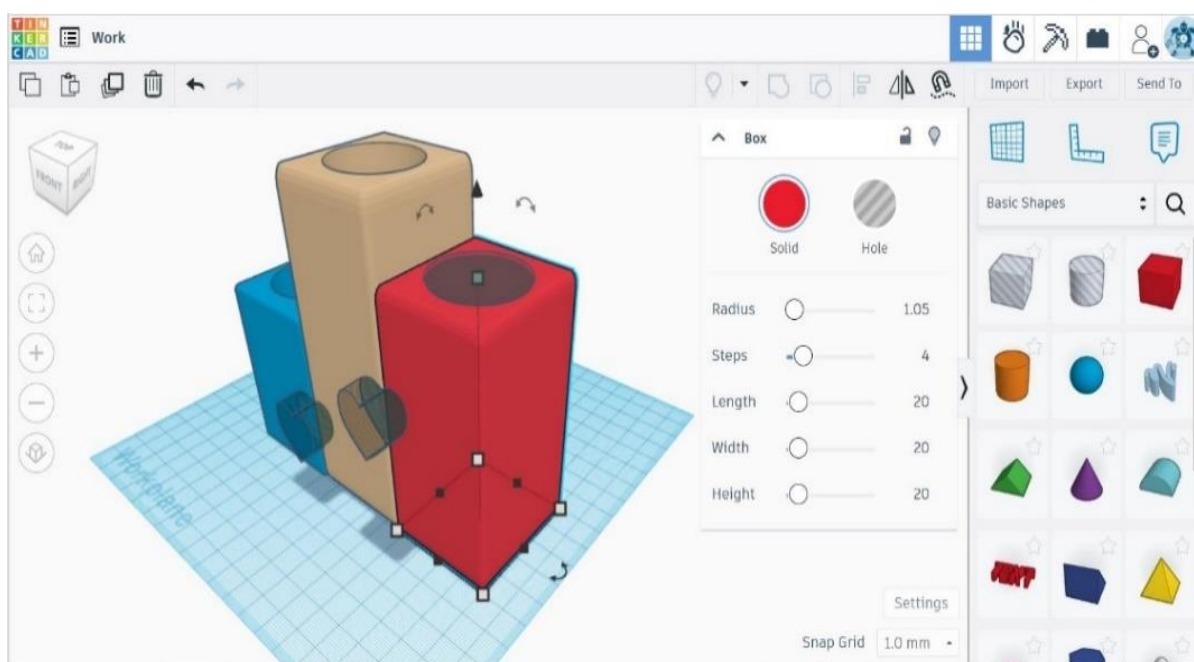
2.1. TinkerCAD

A TinkerCAD [1] egy böngészőben futó 3D modellező alkalmazás, amely 2011 óta érhető el, jelenleg az Autodesk tulajdonában van. Az elmúlt időszakban mind a kezelőfelülete, mind a funkcionalitása több változáson ment át. Számos új funkcióval bővült az alap modellalkotási lehetőség: áramköri tervek is készíthetők, illetve kódblokk-alapú modellalkotás mellett már szimulációs modul is elérhető. A felhasználók regisztráció után ingyenesen elérhetnek minden funkciót, a tanárok számára lehetőség van virtuális osztályterem létrehozására.

A modellek és projektek a saját fiókban tárolódnak, de nyilvánossá tehetőek vagy megoszthatók másokkal, weboldalakba ágyazhatók; letöltésre csak 3D nyomtatáshoz és lézervágáshoz alkalmas formátumokban van lehetőség. Nyitottság tapasztalható az újabb igények irányába is, a kiterjesztett valósággal (AR) kiegészített alkalmazás jelenleg még csak az iPad-ekre érhető el. Az alapnak tekinthető 3D modellező funkciót tekintve egy könnyen átlátható kezelőfelület jellemzi (2. ábra), melyben a galériákba szervezett beépített alaptestekből (primitívekből) a CSG (Constructive Solid Geometry) modellezést követve összetettebb formák hozhatók létre. Ebben csak annyi korlátozást tapasztalhatunk, hogy két forma metszete közvetlenül nem érhető el, ezzel kreatív megoldásokra ösztönzi a felhasználókat. Elérhető paraméteres komponensek is akár művészi megoldásokhoz is, de 2D és 3D komponensek importálásával még komplexebb tartalmak hozhatók létre.

2.2. OpenSCAD

Az OpenSCAD [5] egy szilárdtestek létrehozására alkalmas CAD szoftver, amely elérhető Windows, Linux és Mac OS rendszerekhez. A szokásos, ún. vizuális tervezési folyamattal szemben ez egy saját leíró nyelvet használó szkript-alapú modellező, amely a létrehozott formákat megjeleníti a 3D nézetben. A modellgenerálás alapját geometriai primitívek (gömbök, hengerek, téglatestek stb.), az azokon alkalmazott transzformációk (eltolás, forgatás, skálázás stb.) és egyéb műveletek (például metszések, különbségek, burkológörbe-kombinációk és Minkowski-összegek) alkotják. Teljes mértékben alkalmazhatók a CSG modellezés alapelvei, melyek importált komponensekre vonatkoztatva is működnek. A kezelőfelület egy osztott képernyő a kódíráshoz alkalmas szerkesztőablakkal, a 3D előnézeti, valamint a visszajelzések megjelenítésére alkalmas Console ablakkal (3. ábra).

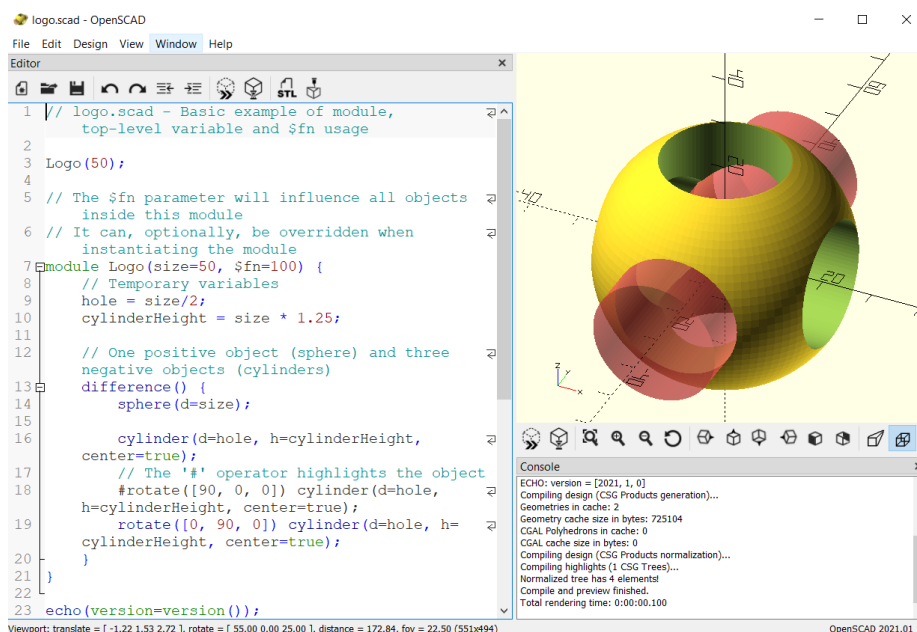


2. ábra. A TinkerCAD alkalmazás szerkesztőfelülete

A 3D nézetben a modell pozíciója (nagyítása, elforgatása), más 3D modellező programokhoz hasonlóan, egérrel interaktívan manipulálható, de ezek nem jelentenek módosítást a generált modellen, csak annak az megjelenítésére vannak hatással. Igazán lényeges változtatások a formákra, azok felületének simítására, a kamera pozíciójának rögzítésére vonatkozóan csak a kódban történő változtatásokkal érhetők el.

2.3. Hogyan válasszunk modellező programot?

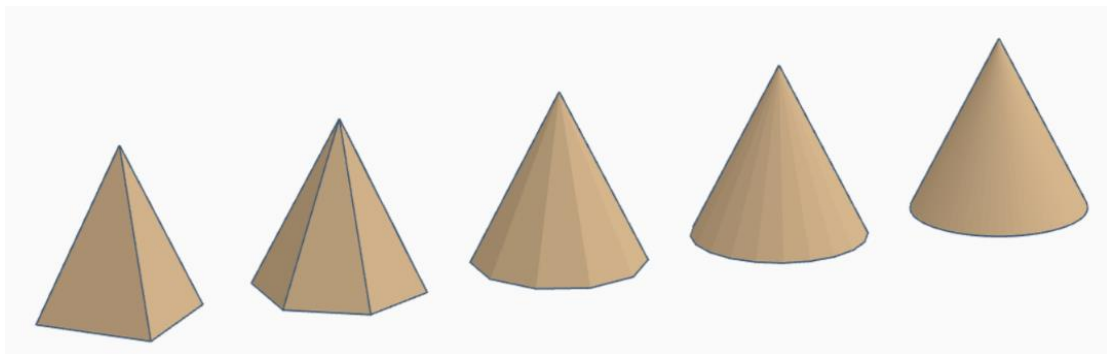
A 3D nyomtatás és modellezés kurzusunkban törekszünk különféle modellezési technikát bemutatni és a feladatválasztásokkal igyekszünk megtapasztaltatni azok előnyeit, hátrányait vagy korlátait is. Első modellezőként a TinkerCAD-et választottuk, amely nagyon hamar ad sikerélményt, de kissé korlátozott eszköztárral rendelkezik. Ennek előnye, hogy a felhasználó kénytelen a matematikai ismereteit kreatívan alkalmazni. A kurzusokon túl jó választás lehet szakkörökön, nyári táborban, pályaorientációs napokon, tudománynpszerűsítés során. Megfelelő feladat-választással vagy témakör kijelöléssel eredményesen használható különböző előképzettségű, korosztályú résztvevőkkel is. Az OpenSCAD-et főként olyan eseményeken használjuk, amikor programozásban járatos résztvevőkre számítunk. A szkriptek megírása már feltételez algoritmizálási képességet és tapasztalatot, ugyanakkor egyszerűbb, de látványos kódok alkalmasak lehetnek az érdeklődés felkeltésére. A saját tapasztalataim alapján, egy modellező program kiválasztása során érdemes több szempontot figyelembe venni. Fontos, hogy illeszkedjen az esemény (rendezvény, oktatási tevékenység) céljához, annak jellegéhez (gyakorlat vagy csak bemutató); vegyük figyelembe, hogy a résztvevők mely korosztályba tartoznak, milyen előképzettséggel rendelkeznek. A választásunkat befolyásolja még, hogy alkalmas legyen az adott feladat megoldására, vagy egy új témakör, tananyag bevezetésére, de akár rámutathatunk bizonyos hátrányokra, korlátokra is.



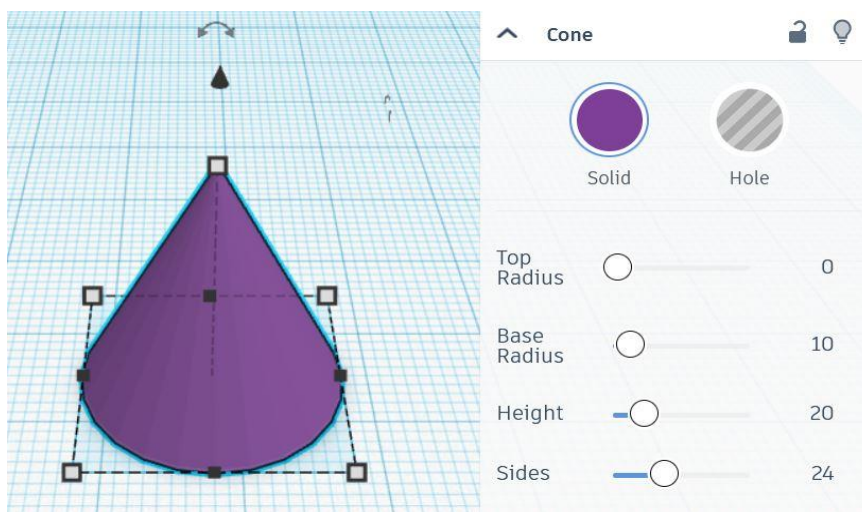
3. ábra. Az OpenSCAD alkalmazás szerkesztőfelülete a renderelt modellel és Console ablakkal. A modell az OpenSCAD logója

3. A 3D modellezéshez szükséges geometriai ismeretek

Ahogy korábban utaltam rá, a geometriai témakörök nem túlságosan népszerűek az informatikus hallgatók körében. Ugyanakkor a 3D modellezés témaköre megkíván alapvető ismereteket, különösen, ha egy összetettebb formát a hallgatónak önállóan kellene komponensekre bontania és felismernie a részek közötti viszonyokat. Mindenképpen fontos, hogy ezekre az összefüggésekre felhívjuk a figyelmet, egy tévesen felismert helyzetet pontosítsunk. De ebben tudnunk kell, hogy milyen előismeretekkel rendelkeznek a hallgatók, vagy az esemény résztvevői. Általánosságban elvárható, hogy az alapvető térbeli geometriai formák (kocka, téglatest, hasáb, gúla, henger, kúp, gömb, tórusz) és meghatározó adataik felismerhetőek legyenek, és a hasonlóságok vagy a közöttük lévő különbségek megfogalmazhatók legyenek. Rávilágíthatunk az általánosítási lehetőségekre olyan kérdésekkel, hogy "Hogyan kaphatunk hasábból hengert?" vagy "Hogyan kaphatunk gúlából kúpot?". A TinkerCAD-ben egy paraméter szabályozza a gúla oldallapjainak a számát, de hasonló tulajdonság fedezhető fel a kúp megjelenítését befolyásoló paraméter esetében is (4. ábra). Megfogalmazható a felületfinomítás szabálya: a kúp ábrázolása akkor a legjobb, ha minél több, kisebb területű háromszöglappal közelítjük azt, azaz a kúp a gúlák továbbfinomított verziója.



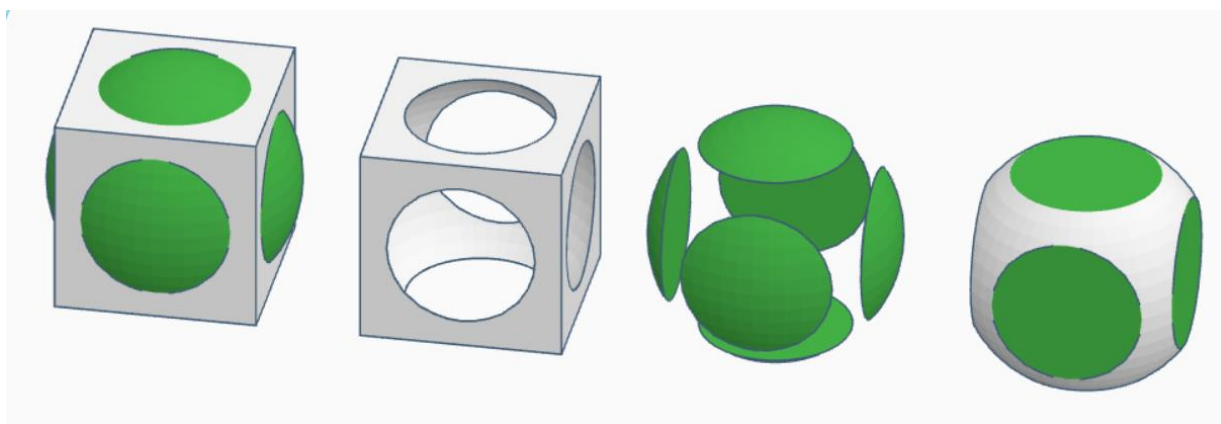
4. ábra. Gúlák és kúpok ábrázolása TinkerCAD-ben.
A kúp nem más, mint egy egyre több oldallappal megjelenített gúla



5. ábra. A kúp alaptest paraméterezési lehetőségei TinkerCAD-ben

A kúp alaptest felfedezésével nemcsak a gúlákhöz köthető kapcsolatok fogalmazhatók meg, hanem a hengerhez vagy a csonkakúphoz való hasonlóság is (5. ábra). Ehhez azonban tisztában kell lennünk az alaptesteket meghatározó geometriai adatokkal és azzal is, hogy ezek közül melyeket tudunk direkt és indirekt módon változtatni az adott modellező alkalmazásban. Modellezés során szinte biztosan szükség van valamilyen geometriai transzformáció végrehajtására, úgymint skálázás (átméretezés), mozgatás, forgatás, tükrözés. Ezek hatása és gyakorlati haszna azonnali visszacsatolást ad anélkül, hogy vissza kellene idézni a középiskolában megismert szerkesztési lépéseket. Csak a transzformációk eredménye lesz lényeges a modellépítés szempontjából.

A már említett CSG modellezés kapcsolódást tesz lehetővé a halmazelméletben használt egyesítés, különbség, metszet műveletek és geometriai alkalmazhatóság között. Erre példaként említhetjük az ismert dobókocka formáját, amely egy jól pozicionált kocka és gömb metszete (6. ábra). A TinkerCAD-ben nem érhető el közvetlenül a metszetképzés, így a program arra kényszeríti a felhasználót, hogy az unió és különbség felhasználásával dolgozzon. Első lépésben arra szoktam kérni a hallgatókat, hogy állítsák elő a két forma unióját, és a különbségeket mindkét verzióban. Ekkor szokták észrevenni, felfedezni vagy éppen újra felfedezni a halmazelméleti szabályt. Látható, hogy alkalmasan jól választott feladat, modellezési tevékenység kapcsolódást tud teremteni a korábban tanult ismeretek irányába, és köthető valós tárgyak formájának felfedezéséhez is. Nem állítom, hogy megszeretik, ezáltal a hallgatók a geometriát, de nyitottabbá válnak. Kutatást nem végeztem, de a tapasztalataim azt mutatják, hogy érdemes kerülni, hogy a modellezés során direkt módon geometriát tanítsunk. Helyette érdekes feladatot választok és hagyom, hogy a hallgatók maguk fedezzék fel azt.



6. ábra. Egy dobókocka formájának előállítási lépései TinkerCAD-ben

4. Jó gyakorlatok

Ebben a fejezetben olyan példákat mutatok be, melyekről azt láttam, hogy motiválóan hatottak a résztvevőkre vagy egy kurzus keretében a hallgatókra.

4.1. Modellezési feladatok fiatalabb korosztálynak

A tapasztalataim alapján a személyessé tett feladatok izgalmasak a résztvevők számára. A TinkerCAD-ben elérhető egy olyan funkció, mellyel egy svg formátumban tárolt egyszerűbb rajz (logó, vonalas ábra vagy akár grafika) importálás után egy kihúzással készült 3D-s tömbbé alakítható. Ezzel a felhasználó ki tud törni a hagyományos geometriai formák adta szorításból és a számára fontos, kedvelt formákat illesztheti be a modell részévé. Ilyen modellezési feladat lehet az 7. ábrán látható egyedi rajz alapján modellezett kulcstartó [2] vagy akár egy fesztiválkörnyezetben is gyorsan elkészíthető buborékfújó [6]. Az említett modellek nyomtatási ideje viszonylag rövid, így rendezvény (nyílt nap, fesztivál, nyári tábor) ideje alatt kinyomtathatók lesznek, így a tervezés teljes folyamata bemutathatóvá válik.

4.2. Modellezési feladatok tapasztaltabb résztvevőknek

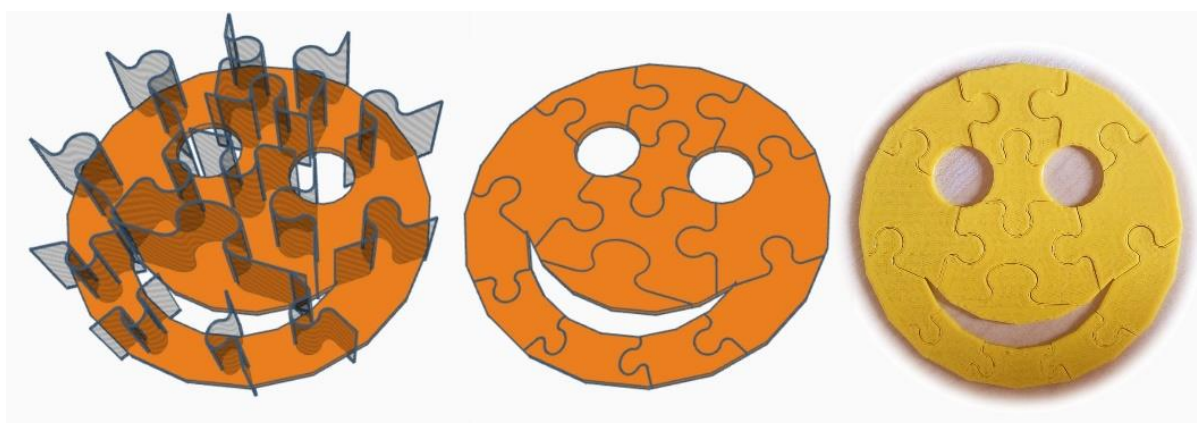
Több 3D nyomtatással kapcsolatos ismeret alkalmazható egyedi puzzle-k készítése során. A síkbeli kirakók esetében nem elegendő a formák szét darabolása, hanem tartani egy megfelelő hézagot a modellezett elemek között ahhoz, hogy a 3D nyomtatás után azok valóban összeépíthetők legyenek. Ehhez ismerni kell az egyenletes szélességű vágóelemek modellezési praktikáit, majd azokat megfelelő pozíciókba helyezve jött létre az 8. ábrán látható síkbeli puzzle.



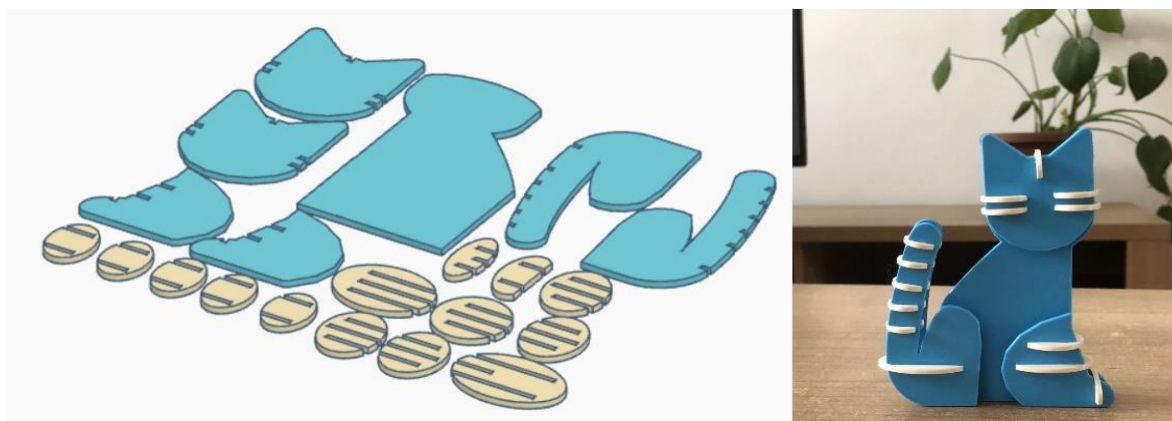
7. ábra. TinkerCAD-ben készíthető egyszerű modellek [2,6]

A 3D kirakók esetében is hasonló ismeretekre van szükség, melyekkel biztosítható az elemek összeépíthetősége; a hézagok szélessége és mélysége befolyásolja, hogy a végső összeállított formát (9. ábra).

A 3D nyomtatás és a hozzá kapcsolódó tervezés különleges, a mozgathatóság lehetőségét biztosító modellek készítésére is alkalmas. A szakirodalom *Print in place* modelleknek nevezi azokat a több alkotóelemből álló 3D terveket, melyek egyetlen nyomtatási folyamatban készülnek el és a mozgathatóságot a komponensek közé tervezett megfelelő hézagok biztosítják. Többféle pörgethető (10. ábra), forgatható, zsanéros kialakítás képzelhető el, melyek izgalmas kihívást jelentenek a haladó modellezők számára.



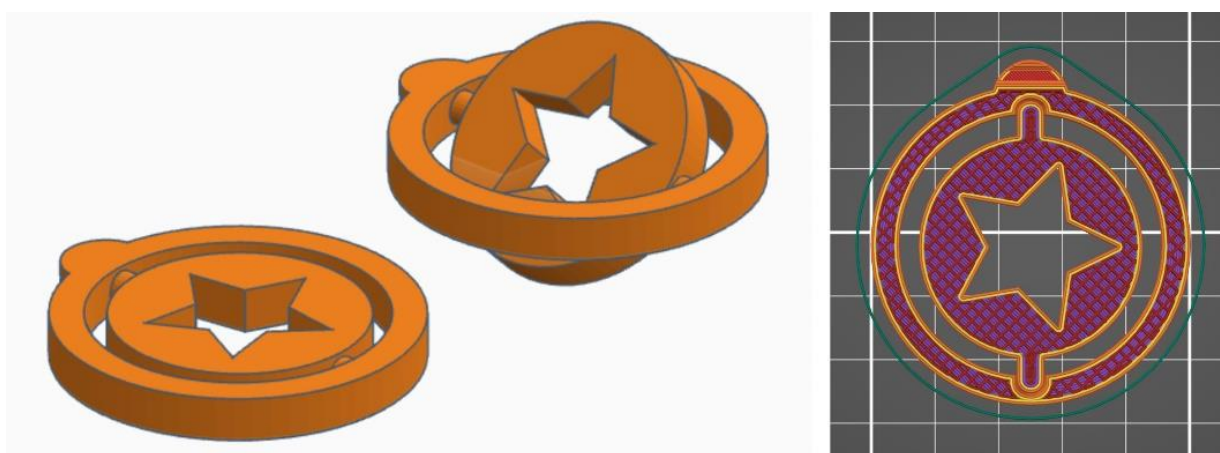
8. ábra. Egyenletes vastagságú vágóelemekkel készített smile formájú TinkerCAD-ben készült kirakó (2017)



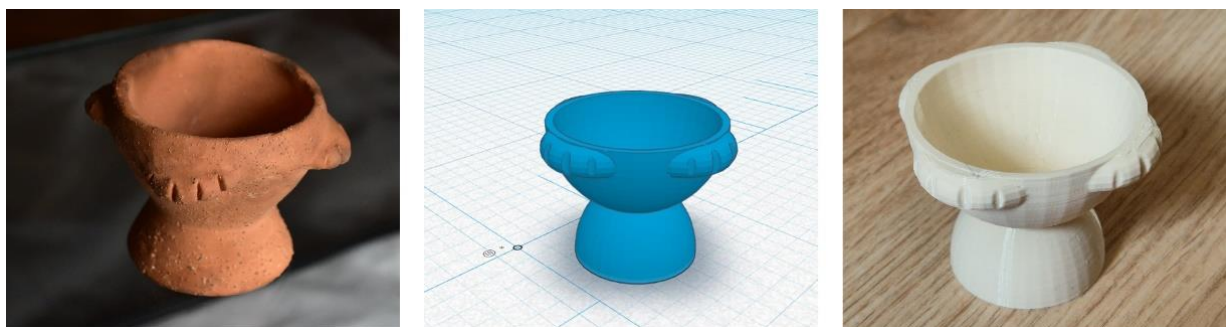
9. ábra. TinkerCAD-ben készült 3D puzzle (2022)

4.3. Személyes kötődés és érzékenyítés, mint motiváció

Ha a modellező program használatában már tapasztalattal rendelkezünk, akkor a személyes érdeklődési körökhöz, a hétköznapi munkához vagy társadalmi szerepvállalásokhoz kapcsolódóan a motiváció fenntartható és a célcsoportok visszajelzései alapján sikerélményt jelent. Napjainkra megváltoztak a múzeumokkal kapcsolatos látogatói elvárások, melyekre természetesen a muzeológia irányelvei reflektáltak. A 21. század múzeumában olyan interaktív kiállításra van szükség, amelyben egyre nagyobb szerepet kap a digitalizáció és a látogatók valamilyen kreatív tevékenység segítségével fogadják be az új ismereteket. Erre láthatunk példát a 11. ábrán, ahol egy kiválasztott műtárgy digitális másolatát lehet elkészíteni modellezéssel, vagyis a rendelkezésre álló formákból kell megalkotni egy hasonló alakzatot, melyet kinyomtatva tulajdonképpen egyedi szuvenír válthat belőle vagy akár egy múzeumi játszóházban lehet kellék. A 3D modellezési tudás alkalmas lehet érzékenyítésre: arra, hogy jobban meglássuk valamilyen fogyatékossgal élő csoport mindennapos nehézségeit, problémáit, és megoldást találjunk néhány speciális kérésükre. Legyen az a feladat, hogy látássérültek számára készítsünk olyan dominókészletet, amelyen a jelek kitapinthatók (12. ábra). Ugyanez fejlesztőeszközként a szenzoros érzékelés fejlesztésében is hasznos lehet egy másik célcsoport számára [4].



10. ábra. Forgatható közepű biléta modellje. A szeletelés során visszabontott modellen jól látható a keret és a középső komponens közötti hézag, amely a pörgethetőséget biztosítja (2023)



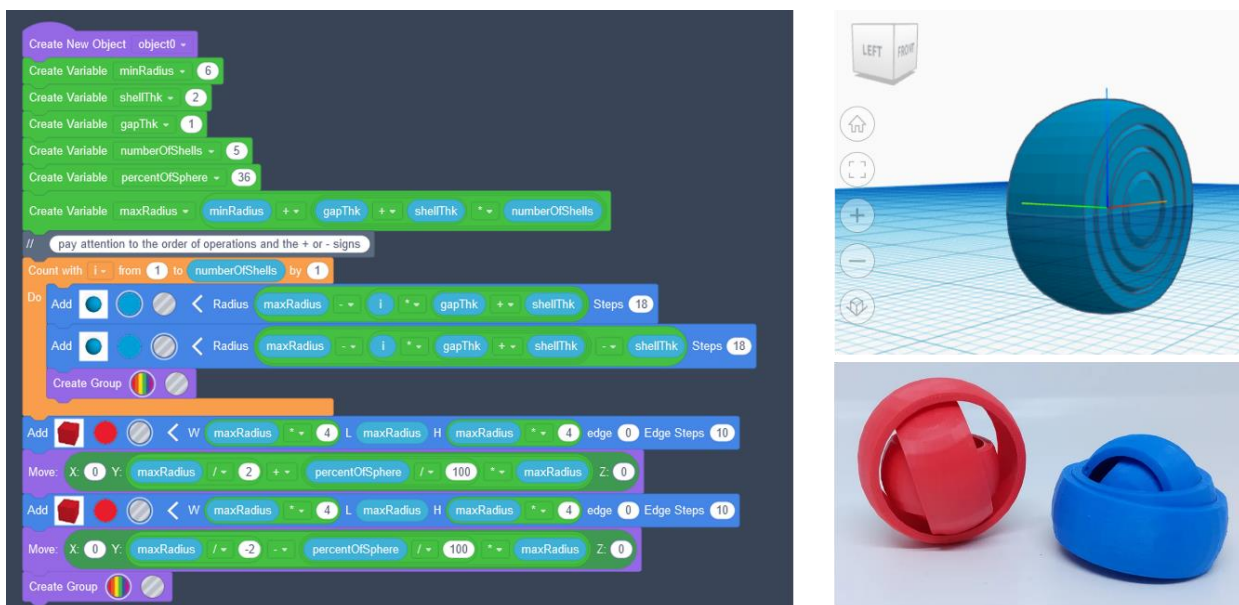
11. ábra. Neolitik korból származó kerámiaedényke és a 3D nyomtatással készített másolata (2021)

4.4. Kód alapú modellezés

Egy modell készítése során mondatszerűen le lehet írni egy komponens formáját és megjelenését. Ekkor a méretére, egyéb geometriai adataira vonatkozó információk, mint attribútumok jelennek meg. Hasonló igaz a megjelenésére vonatkozóan is. Éppen ez hívta életre a kód- vagy kódblokkalapú modellezési keretrendszereket. Az informatikus hallgatók esetében az algoritmizálás ilyen módon történő alkalmazása kifejezetten motiváló lehet. A modellek minden geometriai adata pontosan szabályozható a paraméterek által, szükség esetén hasonló formavilággal rendelkező model családok generálhatók. Napjainkban számos területen elterjedt a parametrikus modellezés nemcsak művészeti téren, hanem mérnöki vagy építészeti alkalmazásokban is.



12. ábra. Szenzoros dominó a tervezés során és a 3D nyomtatott változata [4]

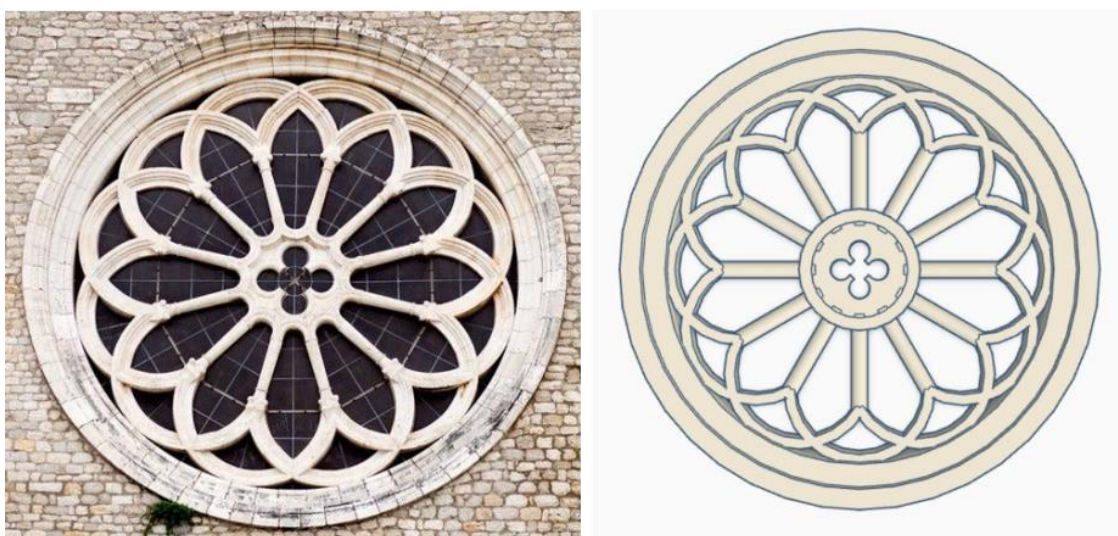


13. ábra. A TinkerCAD Codeblocks-ban modellezett gyroszkóp kódja, megjelenítése és 3D nyomtatott működő példányok [3]

A TinkerCAD-ben külön funkcióként érhető el a Codeblocks funkció, melyben az elemeket leíró blokkok könnyen átszervezhetők, ciklusba szervezhetők, külön komponensként menthetők a későbbi ismételt használathoz. A Codeblocks-ban létrehozott elemek leírásához változók definiálhatók, melyekkel könnyen kikerülhetők a vizuális tervezés során tapasztalható nehézségek. A *Print in place* modellek hézagolására vonatkozó feltételek könnyebben szabályozhatók, mint ahogy azt a 13. ábrán látható giroszkóp példában is láthatjuk. Itt nemcsak a gyűrűk közötti hézag, hanem a gyűrűk száma is paraméter által van szabályozva, maguk a gyűrűformák pedig gömbövekként vannak előállítva [3]. Az épített örökségünk részei tökéletes Codeblocks projektek lehetnek. A rózsablakok motívumai forgásszimmetriát mutatnak, és meg kell találni azokat a geometriai jellemzőket, melyekkel lemásolható egy ilyen rozetta minta. Meg kell keresni az ismétlődő elemeket, felépíteni azok formáját és leírni azt, hogy milyen forgatásokkal másolhatók ezek tovább (14. ábra). A valódi kód-alapú modellezéssel a 2. fejezetben említett OpenSCAD-ben találkozhatunk. A 15. ábrán látható kóddal generált mandala sok hasonlóságot mutat a feni rózsablak modelljével, de egészen más elven készült. A mandala mérete, a forgatandó poligonok oldalainak vagy akár a másolatoknak a száma változók által van szabályozva, de szerepet kap a véletlenszám generátor is [7]. Ennek eredményeként minden renderelésben egy újabb formát kapunk, melyeket 3D akár poháralátétként, akár sablonként vagy dekorációs elemként használhatunk.

4.5. Shapes of Valencia

A Debreceni Egyetem konzorciumi partnerként vett részt az INNOSID (*Innovative Solutions based on Emerging Technologies for Improving Social Inclusion of People with Disabilities*) ERASMUS+ KA203-s projektben [9]. A négyéves munka célkitűzése a fogyatékkal élők társadalmi befogadásának javítására irányuló olyan innovatív megoldások keresése, melyek a feltörekvő technológiákon alapulnak. Ez jelenthetett oktatást vagy életvitelt segítő alkalmazás fejlesztését is, de olyan lehetőségek feltárását is, melybe a fogyatékkal élők bekapcsolódhatnak, akár munkát is vállalhatnak.

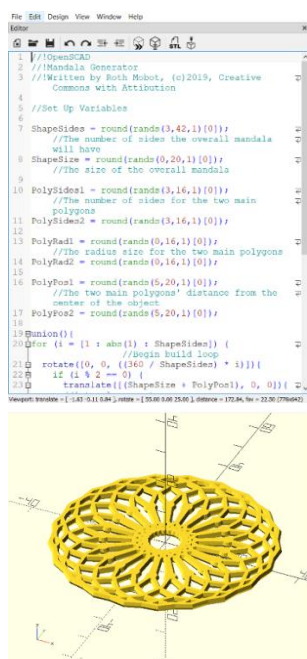


14. ábra. Az eredeti és a TinkerCAD Codeblocks-ban modellezett rózsablak Valvisciolo Abbey, Lazio, Olaszország. Forrás: <https://www.instructables.com/Coding-the-Heritage-Rose-Window-of-Valvisciolo-Abb/> [8]

A 3D technológiákban (3D modellezés és nyomtatásban) láttunk ilyen lehetőséget. A projekt futása alatt több, egyetemi hallgatók bevonásával megvalósult blended mobility időszak volt, amely az online végzett csoportmunka után valós workshop-pal zárult. Ilyen volt a 2022 májusában, Valenciában megrendezett INNOSID Hackathon, melynek egy napja a Shapes of Valencia című workshop volt. Maga a város tökéletes helyszíne egy geometriai felfedező kirándulásnak is, a City of Arts városrész kreatív építészeti megoldásokkal, látványos dekorációs elemekkel igazi 3D modellezési feladattár lehet. A workshop során ezekből válogattunk, és egy modellezési alapok bevezetés után a hallgatók feladatként azt kapták, hogy készítsék el a fotókon látható formák modelljét OpenSCAD-ben. Mivel a résztvevők mindannyian informatikushallgatók voltak, így nem volt irreális a kódalapú modellezési tevékenység.

A 16. ábrán látható díszítőelem a város több pontján is látható. A dekorációs elem gömb alatti talapzata hengerfelületek által határolt, melynek a felismerése segítséget igényelt. Az elforgatott helyzetben lévő hengerekkel történő vágások, mint boolean műveletek már nem okoztak gondot.

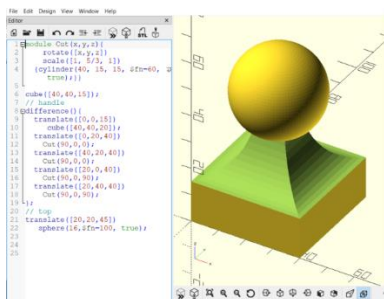
A 17. ábra hídkorlát elemeinél fel kellett ismerni, hogy vagy hengerek és csonkakúpok összeillesztésével, vagy egy profil forgatásával állíthatók elő. Ha egy komponens elkészült, akkor sorba rendezve az összekötő elemekkel kész volt a hídkorlát. A feladat a csapatok számára még nem ért véget a modellezéssel. Arra kértük a résztvevőket, hogy a következő napokban keressék meg a feladataikban szereplő épületeket vagy építészeti elemeket. Mindkét fentebb említett elemet a Túria folyó környékén találhatták meg, a dekorációs elem a folyó hosszában lévő korláton található, míg a korlát a Túria folyón átívelő Puente del Ángel Custodio híd korlátja.



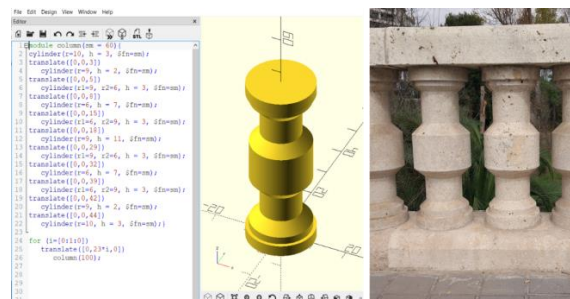
15. ábra. OpenSCAD-ben írt mandalagenerátor [7] és egy 3D nyomtatott mandala (2024)

5. Összefoglalás

A 3D modellezés sokak számára vonzó tevékenység, és ha van lehetőség a modellek 3D nyomtatására, akkor az további motivációt jelent. Ahhoz, hogy a modellekkel szemben támasztott feltételek minél jobban betarthatók legyenek, geometriai, térgeometriai tudás is szükséges, nem csak a modellező program felhasználói felületének ismerete. Az alaptanterv és az érettségi követelmények változásai sajnos nem kedveztek a geometriai ismeretek elmélyítésének. A 3D modellezés tökéletes eszköz arra, hogy a geometriai tudás, gyakorlásra kerüljön, látható legyen azok valódi haszna a felszín vagy térfogatszámításon túl is. Egyetemi kurzus vagy workshop keretében felhívhatjuk a figyelmet bizonyos modellezési alapelvekre, technikákra és módszerekre. A témaválasztás is fontos, meg kell felelnie az éppen használt modellező program funkcionalitásának is, de hallgatók, résztvevők számára kellően figyelemfelkeltőnek és motiválóknak kell lennie. A direkt geometria tanítás kerüendő a 3D modellezés során. A résztvevőknek aktívan kell felfedezni a feladatban lévő geometriai hátteret, a szükséges ismereteket együttesen kell összegezni, a hiányosságokat pótolni. A túl sok, fel nem használt információt inkább teherként érezhetik, felidézve a korábbi rossz tapasztalatokat, élményeket. A motiváció felkeltése és megtartása fontos a modellezés folyamatában. Minden korosztály számára találhatunk olyan feladatot, amely személyessé tehető vagy a formája vagy a felirata vagy mintázata segítségével. Ha pedig arra is van lehetőség, hogy 3D nyomtatás után ezt hazavihessék, akkor már a nyomtatás elkészítésébe is bevonhatók lesznek. Gyakorlott modellező tudással a 3D nyomtathatóság „Szent Gráljaként” emlegetett, több komponensből álló Print in place modellek is készíthetők. Az említett modellezési tudáson túl segítenek a témaválasztások, amelyek akár egy ünnepkörhöz, rendezvényhez, kampányhoz, hobbihoz vagy akár a résztvevők foglalkozásához kapcsolódnak. Példaként egy múzeumpedagógiai foglalkozást említettem, melyben 3D nyomtatható replika készítése volt a feladat. Sokak számára lehet fontos az érzékenyítés, társadalmi befogadás erősítése, fogyatékossgal élők segítése tevékenységek vagy termékek által. Az algoritmizálásban járatos résztvevők szívesen nyitnak a kód-alapú modellezés irányába. Kutatómunkával vagy más tevékenységgel (például a ma divatos kincskereséssel) összekapcsolt, esetleg egyéb interdiszciplináris környezetbe illesztett workshopok, foglalkozások segíthetnek a digitális és a valós tevékenység összekapcsolásával komplexebb élményt nyújtani.



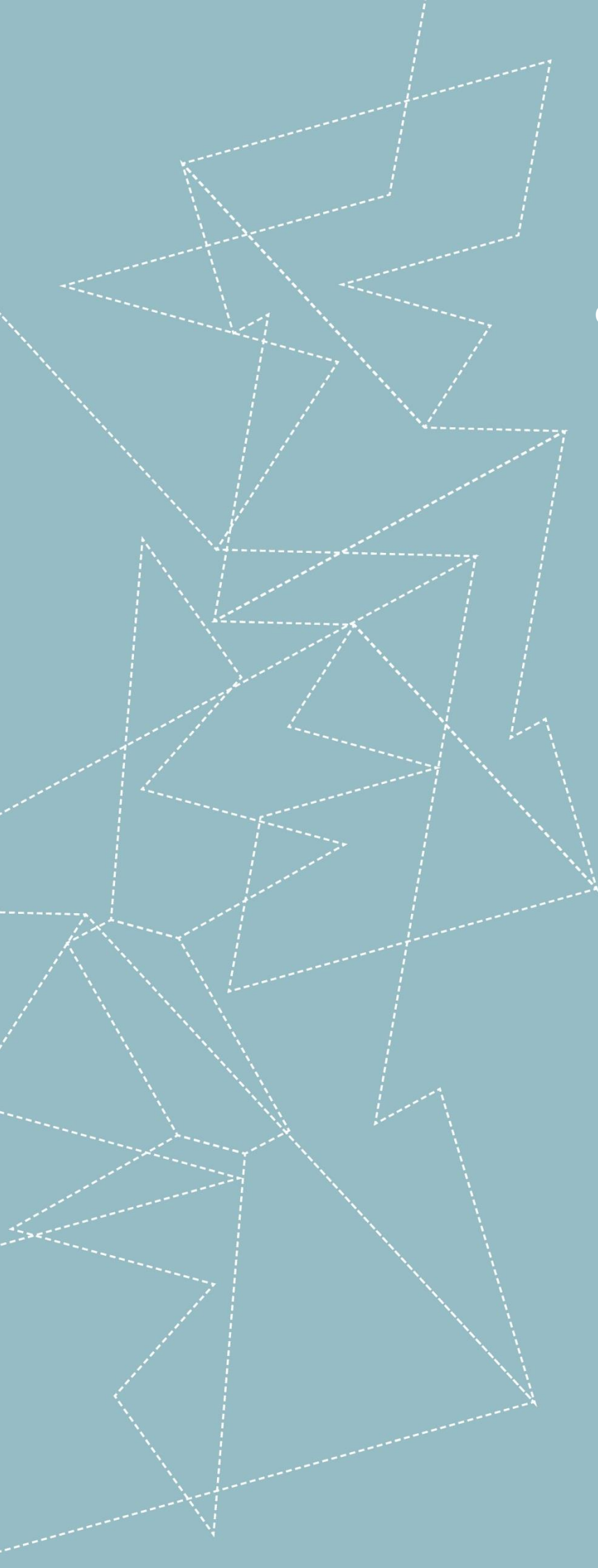
16. ábra. OpenSCAD-ben készített modell egy dekorációs elemről



17. ábra. OpenSCAD-ben készített modell egy hídkorlát eleméről

Irodalomjegyzék

- [1] Autodesk, Inc. (2011-2013). TinkerCAD - Create 3D digital designs with online CAD, <https://www.tinkercad.com/>
- [2] Cheesmond, N. (2021). Birdy Family 3D Art Project, <https://www.instructables.com/Birdy-Family-3D-Art-Project/> (Natalie Cheesmond 3DPrintBunny felhasználónéven).
- [3] Huffee, C. (2018). Parametric Gyroscope and Robot Made With Tinkercad Codeblocks, <https://www.instructables.com/Parametric-Gyroscope-and-Robot-Made-With-Tinkercad/> (Chris Huffee huffee felhasználónéven).
- [4] Janire_A (2024). Cómo Crear Un Dominó Sensorial Táctil, <https://www.instructables.com/C%C3%B3mo-Crear-Un-Domin%C3%B3-Sensorial-T%C3%A1ctil/> (Janire_A felhasználónéven).
- [5] Kintel, M., Wolf, C., (2011). OpenSCAD, <https://openscad.org> , (Utolsó letöltés: 2024. 10. 30.)
- [6] Matty, I. (Mountain Lakes Public Library Makerspace) (2022). Graphic Art 3d Printed Bubble Wands, <https://www.instructables.com/Graphic-Art-3d-Printed-Bubble-Wands/> (Ian Matty LakerMakersClub felhasználóként).
- [7] Mobot, R. (2019). Random Mandala Generator for 3D Printing, <https://www.instructables.com/Random-Mandala-Generator-for-3D-Printing/> (Roth Mobot rothmobot felhasználónéven).
- [8] Thapaakash (2020). Coding With Tinkercad 3D, <https://www.instructables.com/Coding-the-Heritage-Rose-Window-of-Valvisciolo-Abb/> (thapaakash felhasználónéven).
- [9] INNOSID (Innovative Solutions based on Emerging Technologies for Improving Social Inclusion of People with Disabilities) Erasmus+ projekt, <http://sociallab.tel.fer.hr/innosi>



Geometriai alapú famegmunkálás
lézervágási példán keresztül

HORVÁTH PÉTER GYÖRGY

GARAB JÓZSEF

NÉMETH LÁSZLÓ

Geometria alapú famegmunkálás lézervágási példán keresztül

¹HORVÁTH Péter György, ²GARAB József, ³NÉMETH László

¹Soproni Egyetem Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar Kreatívipari Intézet,
email: horvath.peter.gyorgy@uni-sopron.hu

²Soproni Egyetem Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar Alkalmazott Tudományi Intézet,
email: garab.jozsef@uni-sopron.hu

³Soproni Egyetem Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar Alaptudományi Intézet,
email: nemeth.laszlo@uni-sopron.hu

Absztrakt

A korszerű tervezési folyamat fontos eleme a digitális tervezés, melynek segítségével egyfelől a virtuális térben testet ölt a termék, másfelől a megmunkálás számára szolgáltat szerszám pályát, megmunkálási instrukciókat. Az egész folyamat alapja a klasszikus geometriai szerkesztés, mely során dokumentáció formájában rögzítjük elgondolásainkat, megalkotjuk a konstrukciót. A tanulmány a módszeres terméktervezés és a megmunkálás folyamatát mutatja be a faalapú lemezek lézeres megmunkálásának területén, összefoglalva és kiemelve a geometria jelentőségét és felhasználási lehetőségeit. Elemzi a geometriai szerkesztés figyelembe veendő szempontjait, módszereit, előnyeit és hátrányait a megmunkálással összefüggésben.

Kulcsszavak: geometria, megmunkálás, lézer, műszaki tervezés

Geometry-based wood machining through a laser cutting example

¹Péter György Horváth, ²József Garab, ³László Németh

¹*Institute of Creative Studies, Faculty of Wood Engineering and Creative Industries
University of Sopron, Sopron, Hungary, email: horvath.peter.gyorgy@uni-sopron.hu*

²*Institute of Applied Sciences, Faculty of Wood Engineering and Creative Industries
University of Sopron, Sopron, Hungary, email: garab.jozsef@uni-sopron.hu*

³*Institute of Basic Sciences, Faculty of Wood Engineering and Creative Industries
University of Sopron, Sopron, Hungary, email: nemeth.laszlo@uni-sopron.hu*

Abstract

An important element of the modern design process is digital design, which on the one hand embodies the product in virtual space, and on the other hand provides toolpaths and machining instructions for machining. The whole process is based on classical geometric construction, where we document our ideas and create the design. This paper presents the systematic product design and machining process in the field of laser machining of wood-based panels, summarising and highlighting the importance and potential applications of geometry. It analyses the aspects, methods, advantages and disadvantages of geometric design to be considered in the context of machining.

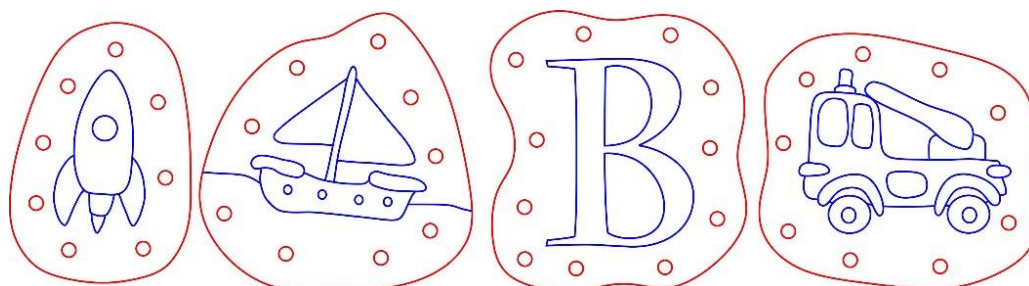
Keywords: geometry, machining, laser, technical design

1. Bevezetés

A XIX. század eleje óta a leíró geometria és a szabadkézi rajz fontos eszköze a tudományos mérnöki munkának [1], mely ma már kiegészül a digitális rajzi megoldások rendszerével és lehetőségeivel. Az ábrázolás manapság nem csak a megértés és a megértetés eszköze, hanem a gyártás, az alapanyag megmunkálásának is fontos alapja, eszköze. Az elkészített digitális rajzok szerszámpályákká alakíthatók, mivel a geometriai információ mellett szükség esetén további paraméterek is rögzíthetők az állományban. A korszerű rendszereknek köszönhetően a szabályos és származtatott alakzatok mellett kézi rajzot, szabadvonalas ábrázolást, összetett geometriákat (1. ábra) is használhatunk alapként. A következőkben hétköznapi termék tervezésén és legyártásán keresztül szemléltetjük a folyamatot, megjelölve a geometria fontosabb alkalmazási területeit, jelentőségét. A gyártáshoz számítógéppel vezérelt lézeres vágóberendezést (ILS.9.15D) használtunk. Az alkalmazott rendszer rugalmassága alkalmazsá teszi [3] a matematikailag definiált görbék alapján történő megmunkálásokra. A berendezés széndioxid alapú gázlézere, mely a két sugárforrásból származó nyalábok egyesítésével éri el a 150 W-os vágóteljesítményt, a megmunkálások során 2"-os lencsével fókuszáltuk a fényt.

2. Módszertan

A szakirodalom és a módszeres terméktervezés hagyományai szerint a tervezési folyamat főbb lépései a feladat-meghatározás, követelmények összegyűjtése, a funkciók meghatározása, a termék anyagi és geometriai megtervezése, gyártástechnológia kialakítása, valamint a termékdokumentáció elkészítése [2]. Termékeink célja a vevői igények kielégítése, oly módon, hogy a felmerült igényeket a termék hordozta funkcióval elégítjük ki. Első tervezési lépés a feladat meghatározása, azaz tisztázni kell a legfontosabb elérendő célokat. Ekkor még nem feltétlenül jelenik meg a tervező fejében a végső megoldás, konstrukció, forma vagy kialakítás, de tanulmányai, ismeretei és intuíciójának köszönhetően kirajzolódik valamiféle elképzelés. A követelmények összegyűjtése során összeállítjuk a felmerült elvárásokat, melyeknek a végeredményben teljesülniük kell. Ilyen elvárás vonatkozhat például a felhasznált anyagra, az alkalmazandó technológiára, a biztonságos használatra, a költségekre, vagy éppen a geometriára. Ebben az esetben a geometria alatt többek között a termék dimenzióit, elrendezését, helyigényét értjük [2]. A követelmények összegyűjtése, rangsorolása és súlyozása után meg kell határozni a funkciókat, melyeket a termék, mint funkcióhordozó fog magán hordozni.



1. ábra. Összetett ábra

Ezen funkciórendszerre alapozva alkotjuk meg több lépcsőben, az optimális megoldást keresve a termékkonceptiót, mely a termék anyagi és geometriai kialakítását jelenti. A végső koncepció megtalálása után technológiai tervezés, valamint a szükséges dokumentáció elkészítése következik. A dokumentáció sok más elem mellett a szükséges rajzi egységeket is tartalmazza. A rajzokon a termék geometriai jellemzőit pontosan jelölik, így biztosítva, hogy a gyártás során a termék a tervezett formában és méretben készüljön el. A rajzi elemek elkészítésében már egytől egyik komoly szerepet kap a geometria, a klasszikus szerkesztés folyamata. A digitális tervezési környezetben a geometriai modellek rugalmassága lehetővé teszi azok többszöri módosítását és újrafelhasználását. Ennek következtében a tervezési folyamat kezdeti fázisában készített rajzoknak fokozott jelentősége van. A tervezőnek már az első vázlatok elkészítésekor is kiemelt figyelmet kell fordítania az egyes geometriai elemekre, azok arányaira és kölcsönhatásaira. Tudatos tervezés elengedhetetlen a végső termék minőségének biztosításához. A műszaki rajzok (2. ábra) a termék alapvető szerkesztett képét mutatják, rögzítve a fontosabb és gyártáshoz szükséges méretekkel. A számítógépes háttérnek köszönhetően bizonyos részek méretezésére márt nincs szükség, hiszen a digitális állomány tartalmazza a megmunkáláshoz szükséges geometriai paramétereket, így például a 2. ábrán látható grafikai elemek méreteit, arányait.

A tárgyak megalkotása, megszerkesztése követi a klasszikus geometriai szerkesztés műveleteit. Merőleget, párhuzamost, érintőt szerkesztünk, szögfelezőket, illetve felezőmerőlegeseket alkotunk. Ezek lehetnek szerkesztési segédelemek, illetve a végső forma alkotó elemei is. A méretezés nélküli megszerkesztett ábra (3. ábra) a további lézeres megmunkálás alapja lehet.

A lézeres megmunkálás (4. ábra) faalapú lemezek esetében is három műveletet jelenthet (5. ábra). A kijelölt geometrián egyszer áthaladva, s ha a gerjesztett közeg által kibocsájtott fénynyaláb kellően erős és képes teljes keresztmetszetében áthatolni az anyagon, akkor vágásról beszélünk. Kisebb teljesítmény esetén, mikor nem vágjuk át teljesen, akkor jelölésről beszélünk. Adott felület megmunkálása esetén gravírozásról van szó. Ezen három műveleti lehetőséget természetesen kombinálhatjuk, így különböző összetett eredményeket érhetünk el.



2. ábra. Egyszerűsített műszaki rajza a KGG'24 konferencia ajándékának



3. ábra. Lézeres megmunkáláshoz készített színskódos ábra

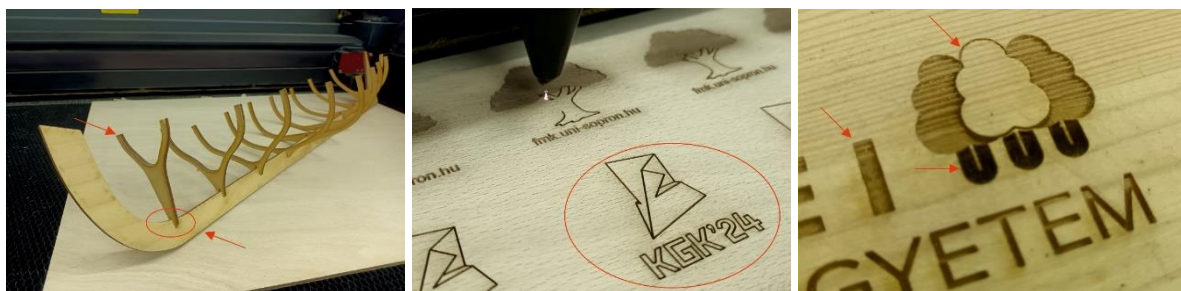
A megmunkált munkadarab vastagságától, az anyagától, a lézervágó teljesítményétől, a lézerfénytől függően különböző vastagságú és formájú vágási rés keletkezik. A köztudatban az van, hogy a lézerrel vágott rész "tűhegynyi" vastagságú. A gyakorlat viszont egy kicsit más. Természetesen léteznek nagyon precíz, drága orvosi lézervágók, vagy pl. az autóipar bizonyos területein alkalmazott lézervágók, de általában a vágási réssel számolni kell. Az alábbiakban erre mutatunk példákat.

Legyen δ a sugara annak a körnek, amit egy lézernyaláb kiejt egy falemezből.

- Ha kivágunk egy r sugarú kört a falemezből, akkor a vágási rés egy 2δ vastagságú körgyűrű lesz és a falemezből kiesik egy $r-\delta$ sugarú körlemez. Ekkor a keletkezett lyukat pedig egy $r+\delta$ sugarú körlemezzel lehet pótolni, mint egy intarzia berakás (6. ábra).
- Ha egy görbével keresztbe átvágjuk a falemezünket, ahogyan a 7. ábra szemlélteti, akkor a két falemez közötti vágási rést két, az eredeti görbével párhuzamos görbe határolja, melynek vastagsága 2δ . (Megjegyezzük, hogy a matematikailag a két görbe azon körök burkoló görbéiből áll, amelyeknek a középpontjai az eredeti görbén vannak és sugaruk δ .) Sajnos általában a három (eredeti, és a két határoló) görbe nem egybevágó. Ha a két részlemez egymáshoz illesztjük, akkor lehet, hogy több helyen nem érintkeznek, rések keletkeznek. Ha két görbe mentén vágott falemezt résmentesen, vagy majdnem résmentes szeretnénk összeilleszteni, akkor két különböző vágási görbét kell meghatározni. Még ha az egyiket szabadon is választjuk, a másikat hozzá kell szerkeszteni, meghatározó adatait hozzá kell számolni.



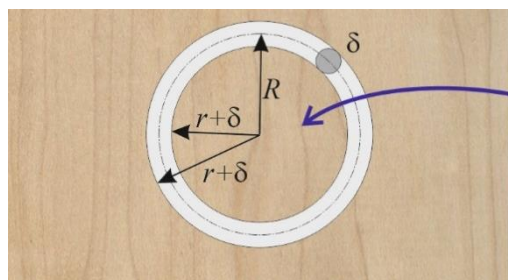
4. ábra. Lézeres megmunkálás



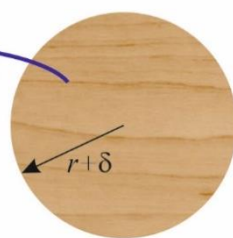
5. ábra. Vágás, jelölés és gravírozás

A megmunkáláshoz természetesen a geometriai paramétereken túl megmunkálási adatokra is szükség van. Ezeket például a szerkesztett ábrába színek segítségével tudjuk rögzíteni. A lézeres megmunkálás során az alkalmazott geometria kihat a termék minőségére is. A lézeres megmunkálással kapcsolatban többek között a következő minőségügyi jellemzők kerülhetnek vizsgálat alá: felületi érdesség, megmunkálás mélysége, vágási rés tulajdonságai, méretbeli pontosság. A lézeres megmunkálás után keletkező felületi érdesség során lézernyaláb után maradt felület kerül meghatározásra. A felületi érdesség kritikus esztétikai és szerkezeti felhasználáshoz. A megmunkálás során fontos, hogy biztosítsuk a lézerezési mélység egyformaságát. A vágási rés vizsgálata során az él épségének a megléte (precizitás), valamint a megégés elkerülése kiemelten jelentős. Mindemellett természetesen a megmunkálandó minta pontosságának a megtartása is szükséges. A faanyag lézeres megmunkálása során eddig általánosabb jellegű minőségügyi tartalommal rendelkező tanulmányok készültek (pl.: Yusoff és tsai. 2008 [2]; Corletto és tsai. 2024 [5]).

A megmunkálás geometria hatása a minőségügyi jellemzőkre egyelőre ritkán vizsgált terület. Ezért jelenleg első sorban a módszerekből, a gépből, az anyagból, a környezetből, a megmunkálást végző szakember által keletkező minőségügyi problémákra fókuszálunk. Ezért Ishikawa-diagramot készítünk, hogy megvizsgáljuk az okokat, melyek minőségügyi problémák kialakulásához vezetnek a faanyagon geometriai minták lézeres megmunkálása során.

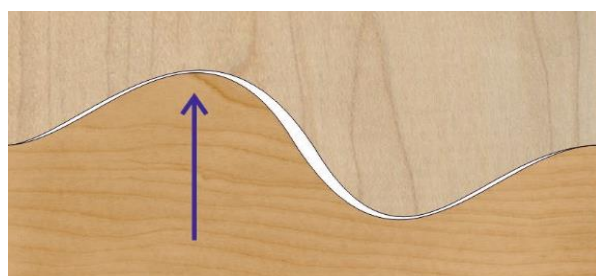
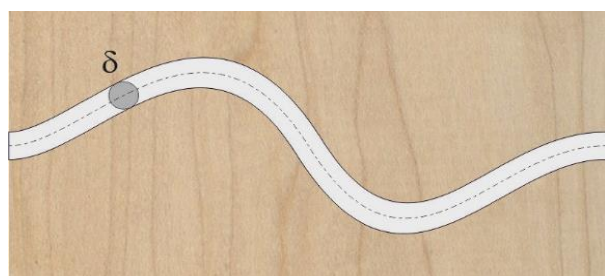


6. ábra. Vágás kör mentén (fent)



7. ábra. Vágás görbe mentén, illesztési rések (középen)

8. ábra. A Konferenciára készített ajándéktárgy (lent)

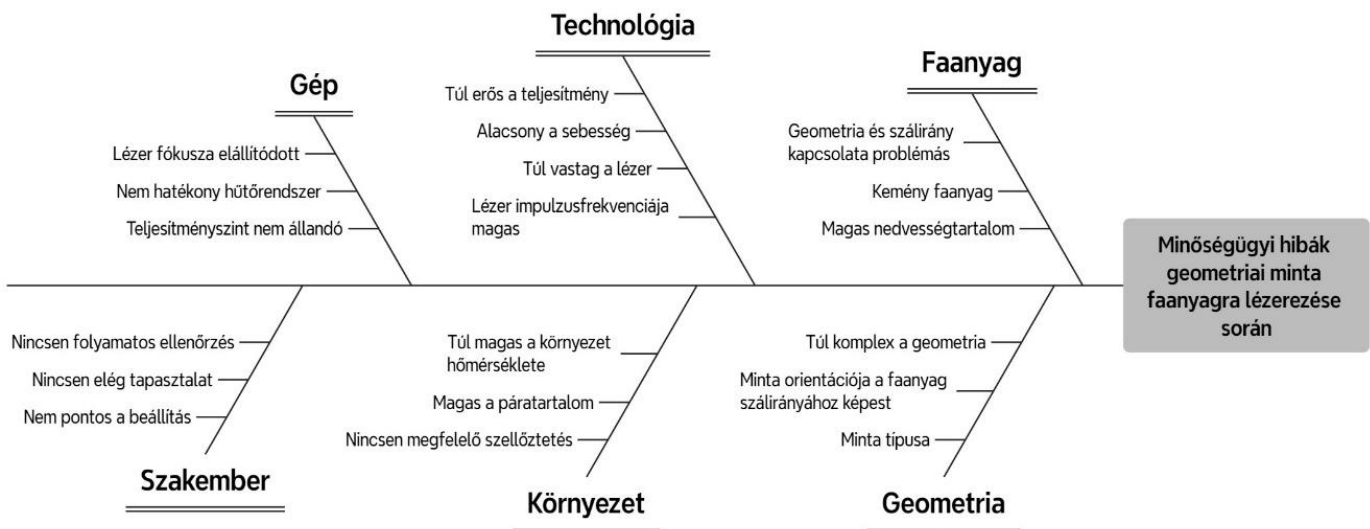


3. Eredmények

A módszeres terméktervezés célja, hogy a problémák megoldásához strukturált és rendszerezett megközelítést alkalmazzunk. Ez a módszer kiegészíti az intuitív feladatmegoldási technikákat, amelyek gyakran ösztönösen és tapasztalat alapján működnek. A tudatos tervezés és végrehajtás kulcsfontosságú, mivel a jól átgondolt és megtervezett lépések révén a feladatok hatékonyabban és eredményesebben valósíthatók meg. A módszeres megközelítés segít abban, hogy a tervezési folyamat átláthatóbb és szervezettebb legyen, csökkentve a hibák és a nem kívánt eredmények kockázatát. A strukturált tervezés révén a feladatok végrehajtása során kevesebb idő és erőforrás szükséges, ami hosszú távon növeli a termelékenységet és a sikeres eredmények elérésének esélyét.

A fentiek természetesen érvényesek a rajzok, műszaki dokumentációk elkészítésére is. Egy tényleges termék (8. ábra) elkészítése során láthatjuk, hogy gyakorlati haszna van a célirányosan elkészített, szerkesztett rajzi struktúrának. A kulcstartó két oldalán eltérő minta található, melyek egyrészt jelöléssel, másrészt gravírozással készültek. A felfüggesztésre szolgáló furat, illetve a külső kontúr vágással készült. A fa mintában szereplő gravírozás és jelölés kombinációja kiemeli a motívumot, így nagyobb esztétikai élményt nyújt. Ezen termék esetében a vágásrészből adódó méreteltérésnek nincs jelentősége, hiszen csatlakozó elem, alkatrész nincs a rendszerben, melynél ez gondot okozna.

A 9. ábrán az Ishikawa-diagram alapján láthatók az egyes okok, melyek befolyással lehetnek a termék minőségére egy geometria alapú lézeres megmunkálás során. Az egyes kategóriákhoz tartozó leírásokat, valamint a minőségi hibák súlyossági szintjét az 1-6. táblázat részletezi.



9. ábra. Ishikawa-diagram a minőségügyi hibák feltárásához

1. Táblázat. A Gép kategóriához tartozó lehetséges hibaokok és az okozat súlyossága

Ok	Leírás	Okozat súlyossági szintje
Lézer fókusz elállítódott	A lézer fókuszának elállítódása befolyásolja a geometriai minta megmunkálásának pontosságát.	Magas
Nem hatékony hűtőrendszer	Nem megfelelő hűtéssel nem biztosítható a gerjesztőközeg egyenletes és stabil üzemeltetése, így nem tudjuk biztosítani a nagyobb felületű és bonyolultabb geometriájú vágások egyenletességét.	Közepes
Teljesítményszint nem állandó	A változó teljesítményszint változó megmunkálási mélységet okozhat.	Közepes

2. Táblázat. A Technológia kategóriához tartozó lehetséges hibaokok és az okozat súlyossága

Ok	Leírás	Okozat súlyossági szintje
Túl erős a teljesítmény	Komplex geometriák lézeres megmunkálása esetén a nagy teljesítmény mélyíti a megmunkálás mélységét, viszont növeli az átégés veszélyét.	Magas
Alacsony a sebesség	Az alacsony sebesség javítja a részletek kialakítását, viszont növeli a behatás idejét, azaz megégéshez vezet.	Közepes
Túl vastag a lézer	A lézer fókuszának/vastagságának a beállítása kiemelkedően fontos, hogy egyforma mélységben történjen a megmunkálás.	Magas
Lézer impulzusfrekvenciája magas	A magasabb impulzusfrekvencia segíthet a tisztább vágásban a szűk geometriák esetén, de felmelegedhet a faanyag felülete.	Közepes

3. Táblázat. A Faanyag kategóriához tartozó lehetséges hibaokok és az okozat súlyossága

Ok	Leírás	Okozat súlyossági szintje
Geometria és száalirány kapcsolata problémás	Száalirányban a lézeres megmunkálás homogenitása megváltozhat. Ez különösen igaz akkor, ha hegyesszöget zár be a minta miközben keresztezi a száalirányt.	Közepes
Kemény faanyag	A keményebb faanyag másképpen reagálhat a lézer beállításaira, ami kihatással van a pontosságra és a sima felületre.	Közepes
Magas nedvességtartalom	A magas nedvességtartalom hatással van a lézer faanyagba történő bejutására. Inkonzisztens lehet a mélység, vagy a geometria mentén a faanyag meg is vetemedhet.	Közepes

4. Táblázat. A Szakember kategóriához tartozó lehetséges hibaokok és az okozat súlyossága

Ok	Leírás	Okozat súlyossági szintje
Nincsen folyamatos ellenőrzés	A folyamat felügyelete során után lehet állítani a paramétereknek.	Közepes
Nincsen elég tapasztalat	A komplex geometriai minták kialakításához kellő tapasztalatra van szükség.	Magas
Nem pontos a beállítás	A faanyag megfelelő beigazítása minimalizálja az eltéréseket és javítja a részletek pontosságát, különösen bonyolult minták esetén.	Magas

5. Táblázat. A Környezet kategóriához tartozó lehetséges hibaokok és az okozat súlyossága

Ok	Leírás	Okozat súlyossági szintje
Túl magas a környezet hőmérséklete	A túl magas környezeti hőmérséklet hatással van a lézer hatékonyságára, az összetett geometriai minták minőségére.	Alacsony
Magas a páratartalom	A magas páratartalom miatt a faanyag vetemedhet, ami a lézeres megmunkálás útvonalára hatással lehet.	Közepes
Nincsen megfelelő szellőztetés	A szellőztetés hiánya miatt túl sok füst lehet a levegőben, ezáltal a láthatóságra van kihatással. Rossz döntéseket lehet hozni.	Közepes

6. Táblázat. A Geometria kategóriához tartozó lehetséges hibaokok és az okozat súlyossága


Ok	Leírás	Okozat súlyossági szintje
Túl komplex a geometria	Az összetettebb formák növelhetik a megmunkálási időt, valamint az egyenetlen vágás vagy a megégetés esélyét.	Magas
Szálirány hatása nincsen megtervezve	A mintát úgy kell megtervezni, hogy a szálirány miatti problémákat lehetőleg elkerüljük (lásd Faanyag jellemzői)	Magas
Minta típusa	A különböző formák (pl. vonalak, rácsok, görbék) befolyásolják a mélységet, a felületet és a hőeloszlást.	Közepes

4. Összefoglalás

A különböző klasszikus geometriai szerkesztési lehetőségek digitális világunkban is használhatók. Azonban ügyelnünk kell arra, hogy a rajz kivitelezésének módja összhangban legyen a további műveletek, tevékenységek igényeivel. A lézeres megmunkálás előkészítéséhez szükséges a rajzi dokumentáció megfelelő előkészítéssel szerszámpályaként definiálható, ügyelve a kész munkadarab geometriai igényeire. A geometria lézeres megmunkálása során számtalan lehetőség adódik, amely során a termék minőségi szintje csökkenhet.

Irodalomjegyzék

- [1] Bairaktarova, D. (2017). Coordinating Mind and Hand: The Importance of Manual Drawing and Descriptive Geometry Instruction in a CAD-Oriented Engineering Design Graphics Class. *Engineering Design Graphics Journal*, Fall 2017, Vol. 81, No. 3. core.ac.uk/download/pdf/229786962.pdf
- [2] Corleto, R., Gaff, M., Rezaei, F., Sethy, A. K., Nemeth, R., Valente, F., & Todaro, L. (2024). Effect of moisture content levels on the quality of beech wood cut by CO2 laser. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 134(1), 159-169.
- [3] Németh, L.; Garab, J.; Horváth, P. G. (2024). *Analysing innovative wood joints crafted by laser cut spline curves*, In: Németh, Róbert; Hansmann, Christian; Militz, Holger; Bak, Miklós; Báder, Mátyás (szerk.) 11th Hardwood Conference Proceedings, Sopron, Hungary, 30-31 May 2024. Sopron, Magyarország: Soproni Egyetem Kiadó (2024) 566 p. pp. 158-162.
- [4] Pahl, G., & Beitz, W. (1981). *A géptervezés elmélete és gyakorlata*. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- [5] Yusoff, N., Ismail, S. R., Mamat, A., & Ahmad-Yazid, A. (2008). Selected Malaysian wood CO2-laser cutting parameters and cut quality. *American Journal of Applied Sciences*, 5(8), 990-996.



Kétszeresen lyukasztott euklideszi és hiperbolikus sokaságok,
mint a „kvantum pöttyök” magyarázata. 40 éves tisztelet a
2023. évi Kémiai Nobel Díj Kitüntetettjeinek és Bolyai János
Abszolút Geometriájának 200. évfordulójára

MOLNÁR EMIL

**Kétszeresen lyukasztott euklideszi és hiperbolikus sokaságok,
mint a "kvantum pöttyök" magyarázata. 40 éves tisztelet a 2023. évi
Kémiai Nobel Díj Kitüntetettjeinek és
Bolyai János Abszolút Geometriájának 200. évfordulójára**

MOLNÁR Emil

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Természettudományi Kar, Matematika Intézet,
email: emolnar@math.bme.hu

Absztrakt

Közel 40-éves dolgozatom, mely a Bolyai Társulat Kollokvium sorozatának **46**, 1984. évi Debrecen-Hajdúszoboszló konferencia-kötetében 1987-ben jelent meg a 883-919 oldalakon, meglepően időszerűvé vált a 2023. évi Kémiai Nobel Díj Kitüntetettjeinek: Alexey Yekimov, Luis E. Brus és Mounqi G. Bawendi munkásságában. Természetesen, akkoriban nem sejthettem a téma aktualitását, mely egy korábbi hibás cikkem következménye volt. Abban a dolgozatban új, nem-irányítható kompakt hiperbolikus sokaságok (*térformák*) végtelen sorozatát akartam megszerkeszteni, mint Bolyai János H^3 hiperbolikus geometriájának különleges poliéderkitöltéseit. Szerencsére hamar észrevettem és kijavítottam a hibát. Nevezetesen azok a konstrukciók nem voltak sokaságok (csak "*majdnem*" sokaságok), mert két fixpont-pálya volt bennük, melyekben középpontos tükrözés lépett fel, mintegy "kilyukasztva" a sokaságot. Itt a pont "környezete" nem teljes labda, amit megkívánunk egy sokaságban, hanem a labda középpontra szimmetrikus pontjait "összeragasztjuk".. De ezek a különleges szinguláris pontok, mint "kvantum pöttyök" például réz és klór ionokkal üveg-, azaz szilícium-folyadékban (ami aztán "megfagy") fényjelenséget okoznak elektronjaik "ugrabugrájával", s a fény színe a kristályrészecskék méretétől függhet (gondoljunk csak a színes televízió képernyőjére). *Tehát a hiba sokkal érdekesebb volt, mint az eredeti szándék, melyet aztán később sikerült elérni.*

Kulcsszavak: kétszer lyukasztott sokaság, euklideszi és hiperbolikus kristálycsoport

Twice punctured Euclidean and hyperbolic manifolds, revisited as hypothetical "explanation for quantum dots". 40 years old Honour to the Laureates of Chemistry Nobel Prize 2023, and also to the 200th Anniversary of János Bolyai's Absolute Geometry

Emil MOLNÁR

Institute of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Budapest University of Technology and Economics, Budapest, Hungary, email: emolnar@math.bme.hu

Abstract

My ~40 years old paper in the title [1] Molnár, E., Twice punctured compact Euclidean and hyperbolic manifolds and their twofolds coverings, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, 46. Topics in Differential Geometry, Debrecen (Hungary), 1984, (1987), 883- 919. had got a surprising actuality in the Chemistry Nobel Prize 2023 awards for the three Laureates: Alexey YEKIMOV, Luis E. BRUS and Mounji G. BAWENDI. Of course, the present author of that paper could not guess that time the actuality that was an incidental consequence of my erroneous paper [2], intended to construct an infinite series of non-orientable compact hyperbolic manifolds (space forms), as a polyhedral tiling series in the Bolyai-Lobachevsky hyperbolic space \mathbf{H}^3 . Fortunately, I observed and improved the mistake soon. Namely, those constructions were not manifolds because of the two fixed point orbits as punctures, where point reflections (central inversions) occurred in the symmetry group of the tricky polyhedral tilings. But these singular points, as "quantum dots" e.g. for copper and chlorine ions, respectively, in glass (silicon) fluid cause light effects (by "electron jumping-leaping") whose colours might depend on the sizes of crystal particles. That means, the mistake was much more interesting than the original intention that can be reached easily later!

Keywords: twice punctured manifold, Euclidean and hyperbolic crystal group

1. Bevezetés az eredeti dokumentumokkal

COLLOQUIA MATHEMATICA SOCIETATIS JÁNOS BOLYAI 46. TOPICS IN DIFFERENTIAL GEOMETRY DEBRECEN-HAJDÚSZOBOSZLÓ (HUNGARY), 1984.

TWICE PUNCTURED COMPACT EUCLIDEAN AND HYPERBOLIC MANIFOLDS AND THEIR TWOFOLD COVERINGS

E. MOLNÁR

A complete connected Riemannian n -dimensional manifold of constant sectional curvature is briefly called a space form. Intuitively, each space form is locally isometric to one of the classical n -spaces of constant curvature. It is well-known that each space form can be represented as an orbit space M/G . Here M is one of

SOKASÁG (FOLYTATÁS) ÉS "KÉTSZERESEN LYUKASZTOTT SOKASÁG"

represented as an orbit space M/G . Here M is one of simply connected n -spaces of curvature K , i.e. M is either a spherical ($K>0$) or the Euclidean ($K=0$) or a hyperbolic n -space ($K<0$). The isometry group G acts discontinuously and freely on M , i.e. there is a nonempty open set V in M so that no two distinct points of V are equivalent under G , moreover, the identity 1 is the only element of G which has fixed points. Then G can be considered as the fundamental group of the manifold M/G .

Fordításban: Egy teljes összefüggő n -dimenziós állandó 2-metszet-görfületű Riemann sokaságot röviden *térformának* nevezünk. Intuitív módon elképzelve, minden térforma lokálisan a klasszikus n -dimenziós állandó görbületű terek valamelyikével egybevágó (izometrikus). Jól ismert, hogy bármely térformát egy M/G pályatérként képzelhetünk el. M egy n -dimenziós egyszeresen összefüggő K metszet-görfületű tér, azaz M vagy a gömbi ($K > 0$), vagy az euklideszi ($K = 0$) vagy a hiperbolikus ($K < 0$) n -térrel azonos. A G izometria csoport *nem-folytonos módon, szabadon* hat M -en, azaz létezik olyan nem-üres nyílt V halmaz M -ben, hogy V két pontját G nem képezi egymásra, továbbá G -nek csupán az 1 egységeleme, az *identikus leképezés* rendelkezik fixponttal. Ez a G az M/G sokaság *fundamentális csoportja*.

DE! Léteznek olyan "kilyukasztott sokaságok" melyeknek két kivételes "szinguláris pontja van", mindegyik olyan "félgömb-környezettel", ahol egy "labda középpontra átellenes pontjait logikailag összeragasztjuk". Az ilyen G csoportnak két szinguláris pont-pályája van, azaz M/G "kétszer-kilyukasztott (majdnem) sokaság".

1.1. Euklideszi példa – 1. ábra (6. dia): a $Pbca$ tércsoport

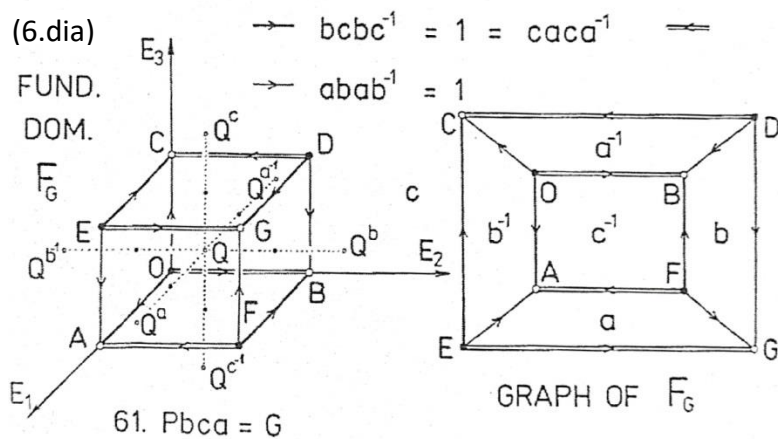
Az 1. ábra $OE_1E_2E_3$ derékszögű (de nem feltétlenül egyenlő egységű) un. ortorombikus koordinátarendszerében fellépnek:

- Irányítástartó transzformációk: $\mathbf{1}$ (x^1, x^2, x^3) azonos leképezés \mathbf{s}_1 ($\frac{1}{2} + x^1, \frac{1}{2} - x^2, -x^3$); \mathbf{s}_2 ($-x^1, \frac{1}{2} + x^2, \frac{1}{2} - x^3$); \mathbf{s}_3 ($\frac{1}{2} - x^1, -x^2, \frac{1}{2} + x^3$) csavar-mozgások.
- Irányításváltó transzformációk: $-\mathbf{1}$ ($-x^1, -x^2, -x^3$) pont-tükrözés (az O kezdőpontra és így az F, D, E , majd C, G, B, A pontokra is), \mathbf{b} ($\frac{1}{2} - x^1, \frac{1}{2} + x^2, x^3$); $OAEC =: b^{-1} \rightarrow FBDG =: b$; \mathbf{c} ($x^1, \frac{1}{2} - x^2, \frac{1}{2} + x^3$); \mathbf{a} ($\frac{1}{2} + x^1, x^2, \frac{1}{2} - x^3$) eltolás-tükrözések. És persze mindhárom tengely irányában fellépnek egység távolságú eltolások, a Λ_G rács elemei.

2024 áprilisában a Székesfehérvári Teleki Blanka Gimnázium ünnepi matematika szakkörében tartott előadásom alkalmával Budai Endre tanár úr egy "csoda-kocka modellt" ajándékozott nekem az iskola nevében, mely véletlenül éppen illusztrálja a nanométerben ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) létrejövő viszonyokat. 3D-nyomtatóval a <https://www.thingiverse.com/thing:10483> internet címről másolta le ismeretlen szerzőtől származó modelljét. Soproni konferencia előadásom után pedig Szabó Péter kolléga (Soproni Egyetem) több változatban is előállította a fenti internet cím mozgatható "új Rubik-kockáját".

1.2. A 61. $Pbca = G$ tércsoport (kristálycsoport) elemzése

A fenti G csoportozhoz tartozó F_G alaptartomány a 6. dián geometriailag jellemzi ezt a G tércsoportot. A bázisvektorok $|OE_i := \mathbf{e}_i|$ ($i=1, 2, 3$) hosszai adott paraméterek (melyeket egy anyagi kristály esetén méréssel kell meghatározni). A G -hez tartozó Λ_G rács eltolásait egész koordináta-hármasok adják meg, ezek lineáris része az $\mathbf{1}$ azonos leképezés. Tudjuk, és megállapodás szerint G bármely $\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{a})$ eleme $\alpha: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{XA} + \mathbf{a} = \mathbf{X}^\alpha$ inhomogén lineáris leképezéssel adható meg. Itt az \mathbf{A} lineáris részt a fenti $OE_i := \mathbf{e}_i$ bázisban egység-determinánsú egész-elemű (*unimoduláris*) mátrix fejezi ki, \mathbf{a} pedig a törtrész-eltolás. Egy tetszőleges X pont helyvektora $\mathbf{X} = x^i \mathbf{e}_i$ (Einstein-Schouten összegzési index konvencióval). Ennek \mathbf{Y} képe a fenti \mathbf{X}^α helyvektorú Y pont.



The twice punctured manifold $E^3/Pbca$
b: $OAEC \rightarrow FBDG$
c: $OBFA \rightarrow DCEG$
a: $OCDB \rightarrow EAFG$

1. ábra. (6.dia). Bővebb 205. $Pa3^- = G^-$ tércsoportot kapunk, ha az F_G alaptartomány kocka, ekkor OG körül 3-forgatás lép fel.

Láthatjuk, hogy O, D, E, F – G -ekvivalens tükrözési centrumok, mondjuk réz (**Cu**) ionokkal, ugyanígy G, A, B, C klór (**Cl**) ionokkal (például az első négy pont együttes, F_G be eső környezete ($4 \cdot 1/8$, azaz) egy félgömböt tesz ki, ugyanúgy a másik négy ponté). De az F_G fundamentális kockába még szilícium (Si) atomok is beépülhetnek (az atomsugaraknak megfelelő méretben, mely a periódusos rendszer alapján kikövetkeztethető!). Például az OG 3-forgás tengelyén 1 (Si) atom és 2-2 (?) (Si) atom az F_G szemközti lapjain, melyek rendre **b, c, a**, eltolás-tükrözésekkel képződnek egymásra. Képzeld el tehát, hogy 1:1:7(?) arányban **Cu, Cl, Si** megfelelő kristályrészecskét alkotnak megfelelő kockamérettel, és ezek a részecskék (még több kockával növekedhetnek is) az üveg-(szilícium-)folyadékban "úszkálnak", ami aztán megfagy. De a szingularitások arra "kényszerítik" a **Cu** és **Cl** ionok elektronjait, hogy a héjak közötti "ugra-bugrával" fényjelenséget hozzanak létre, ezek a "kvantum pöttyök" (**quantum dots**). A fény színe a részecskék méretétől függ. *Képzeld el a televízió képernyőjét, melyet aztán gerjesztünk, hogy a megfelelő részecskék a megfelelő színben világítsanak!*

2. Hiperbolikus kristálysorozatok

2.1. G_{tu}^1 csoportok F_{tu}^1 fundamentális tartományainak végtelen sorozata a H^3 hiperbolikus térben

A 2. ábrán egy $q = 2t+1 = 5$ forgás-szimmetriájú "korongot" látunk ("összelapítva", a síkba kiterítve), melynek oldallap-párjait (mint az előző euklideszi ábrán) rendre "összeragasztjuk": pl. az $s_u: s_u^{-1} \rightarrow s_u$ csavarmozgással (u -tól, t -től függően) a 2. ábra szerint. Összefoglalva a G_{tu}^1 csoport adatait (egységes módszerekkel dolgozunk, Bolyai János abszolút geometriájának szellemében).

– *Generátorok:* $a_i (-t \leq i \leq +t): a_i^{-1} \rightarrow a_i$ eltolás-tükrözések – $p_i (-t \leq i \leq +t): p_i^{-1} \rightarrow p_i$ és $r_i (-t \leq i \leq +t): r_i^{-1} \rightarrow r_i$ csavarmozgások – $s_u (0 \leq u \leq t, \text{ rögzített } u, \text{ a 2. ábrán } u=1): s_u^{-1} \rightarrow s_u$ egyetlen csavarmozgás

– Összesen: $3q + 1 = 6t + 4$ generátorunk van.

A nyilazott élosztályokhoz tartozó relációkat az 1. Táblázatban gyűjtöttük össze: például $a_{-t} a_{-t-1} \dots a_0 a_0 \dots a_{+t} a_{+t+1} = 1$; – és pl. ${}^{ooo} > a_0 p_0 a_{-u}^{-1} r_t = 1$. A $C(\text{Cu})$ és $D(\text{Cl})$ pontok (ionok) pályái tükrözés középpontok félgömb környezetekkel, azaz lyukasztások, mint "kvantum pöttyök". A többi pontpálya (például G, E, A, H, L, \dots pályája), esetleg Si atomokkal (ionokkal), teljes gömbkörnyezettel rendelkezik, ahogy a sokaságoktól megkívánjuk. A (**Cu**), (**Cl**), (**Si**) aránya a $q = 2t+1$. paramétertől függ. Végtelen sok hiperbolikus lehetőség van. A *minimális lehetőség* $t = 1, q = 3$ esetén különösen érdekes és fontos lehet a (kísérleti) megvalósíthatóság szempontjából. Ekkor $u = 0$, és a G_{10}^1 csoportra az 1. Táblázatból sok következmény is kiolvasható:

$$\begin{aligned} G_{10}^1 &= \{a_{-1}, a_0, a_1; s_0 =: s, p_{-1}, p_0, p_1, r_{-1}, r_0, r_1 - 1 = a_{-1}^{-2} a_0^{-2} a_1^{-2} = (a_{-1} s a_1 s^{-1})(a_0 s a_{-1} s^{-1})(a_1 s a_0 s^{-1}) \\ &= (p_{-1} s r_{-1}^{-1} s) = (p_0 s r_0^{-1} s) = (p_1 s r_1^{-1} s) = (a_{-1} p_{-1} a_{-1}^{-1} r_0) = (a_0 p_0 a_0^{-1} r_1) = (a_1 p_1 a_1^{-1} r_{-1}) \\ &= (a_{-1} r_{-1}^{-1} a_{-1}^{-1} p_{-1}^{-1}) = (a_0 r_0^{-1} a_0^{-1} p_0^{-1}) = (a_1 r_1^{-1} a_1^{-1} p_1^{-1})\} \end{aligned}$$

és az alaptartomány harmadrendű forgás-szimmetriával rendelkezik.

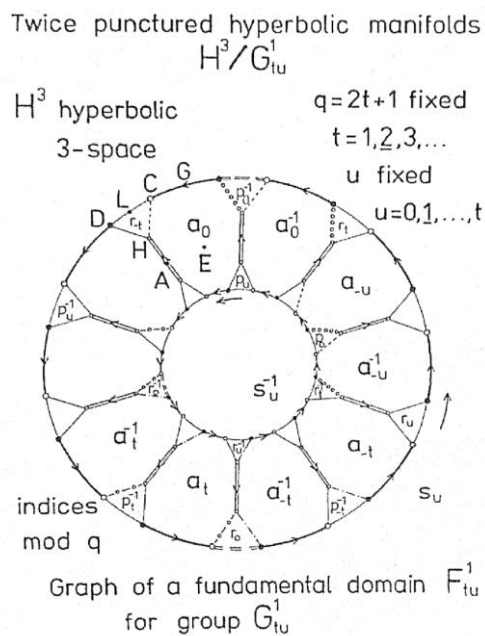
Megjegyzés. Eredeti [1] dolgozatunkban fáradságos munka volt hosszú számíttással levezetni, hogy a C és D pontokat pontra való tükrözés viszi önmagukba. Különleges csoportelméleti feladat volt, hogyan vezethető le ez a G_{10}^1 csoport 1. Táblázatbeli "prezentálásából"? (Próbáljuk meg ezt az előbbi konkrét példában!)

2.2. A $G_t^2 (u = 0)$ csoportok F_t^2 alaptartományainak végtelen sorozata a H^3 térben

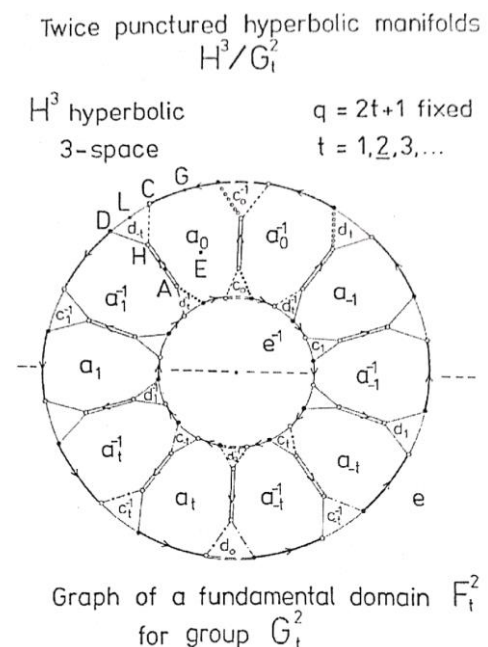
Az előzőhöz hasonló végtelen csoport-sorozatot kapunk a 3. ábra F_t^2 alaptartományával:
 Generátorok: $a_i (-t \leq i \leq +t)$: $a_i^{-1} \rightarrow a_i - c_i (-t \leq i \leq +t)$ eltolás-tükrözések – $c_i (-t \leq i \leq +t)$: $c_i^{-1} \rightarrow c_i$ és $d_i (-t \leq i \leq +t)$: $d_i^{-1} \rightarrow d_i$ eltolás-tükrözések – $e (0 \leq u \leq t, \text{ az egyszerűség kedvéért } u = 0 \text{ rögzített})$: $e^{-1} \rightarrow e$ egyetlen eltolás-tükrözés. Összesen $3q + 1 = 6t + 4$ generátor van. Az élosztályokhoz tartozó relációk most is az 1. Táblázatban vannak: például $a_{-t} a_{-t} \dots a_0 a_0 \dots a_{+t} a_{+t} = 1$ identitás; pl.: $ooo > a_0 c_0 a_0^{-1} d_t = 1$. A $C(Cu)$ és $D(Cl)$ pontok (ionok) pályái tükrözési középpontok "fél-labda környezettel", vagyis lyukasztások, azaz "kvantum pöttyök". Bevezethetnénk egy u egész paramétert is az előbbi mintára ($0 \leq u \leq t$), hogy különböző (nem-egybevágó (!?)) "majdnem sokaságokat" kapjunk (egybevágó alaptartományokkal)!? Röviden vázoljuk a Bolyai - Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometria projektív metrikáját! A lényeg, hogy a fenti két "korong alakú" (egyenlő t -kre egybevágó) alaptartomány összes szög- és távolság-adatát ki tudjuk számítani a t adott paraméter segítségével.

2.3. A C_t tükrözés csoport és alaptartománya a H^3 térben, mint egy csonkított derékszögű szimplex (orthoscheme); A H^3 tér Beltrami-Cayley-Klein (B-C-K) modellje, az előbbi G_{tu}^1 és G_t^2 csoportok generatorai; Coxeter diagram és fontos távolságok, vázlat

A későbbi derékszögű projektív $A_0 A_1 A_2 A_3 \sim b^0 b^1 b^2 b^3$ koordináta szimplex (6. és 7. ábrák) és a valós 4-dimenziós V^4 vektortér és V_4 duálisa (a vektorokon értelmezett lineáris függvények (formák) duális tere) írják le az X pontokat (balról írt koordinátákkal d ölt nagybetűkkel az A_i bázisban) $X(X = X^i A_i \sim cX)$; illetve jobbról írjuk a V_4 duális tér u formáinak együtthatóit (a b^j duális bázisban az u 2-(hiper)síkok jellemzésére $u(u = b^j u_j \sim uc)$; $A_i b^j = \delta_i^j$ (Kronecker szimbólum)).



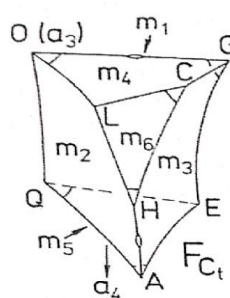
2. ábra. $q = 2t + 1 = 5$ forgás-szimmetriájú "korong"



3. ábra. Egy másik végtelen sorozat $q = 2t + 1$ paraméterrel ($t = 1, 2, 3, \dots \in \mathbf{N}$)

A szimmetrikus Coxeter-Schläfli (C-Sch) matrix $(b^{ij}) = \langle \mathbf{b}^i, \mathbf{b}^j \rangle = (\cos(\pi - \theta^{ij}))$ segítségével fejezzük ki előbb a szögeket: $\theta^{ij} = (\angle \mathbf{b}^i \mathbf{b}^j)$ és $(\angle \mathbf{b}^i \mathbf{b}^j) = \pi$ (megállapodás szerint); aztán a távolságokat: az előbbi (C-Sch) mátrix inverzével $(b^{ij})^{-1} =: (A_{ij}) =: \langle \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j \rangle$ és $\cosh(XY/k) = -\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle / (\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle)^{1/2}$ adja meg az X és Y pontok távolságát. Itt $k = (-1/K)^{1/2}$ a \mathbf{H}^3 hiperbolikus tér univerzális távolság-egysége (választhatjuk 1-nek), K a negatív állandó "2-metszet" görbület. Nano-méretben (1 nanométer = 10^{-9} méter) a k-t mérésel kell meghatároznunk. Az Elemek Periódusos Rendszerének Táblázata fontos adatokat szolgáltat az atomsúly-arányokkal, amikből az atomsugár-arányok is következnek (természetesen csak "közelítéssel")! További matematikai részletek találhatóak az irodalomjegyzékben, pl. [1, 9]. A 4-5. ábra mutatja a C_t tükrözéscsoport alaptartományát, ami a későbbi (6. és 7. ábra) új $A_0 A_1 A_2 A_3 = b^0 b^1 b^2 b^3$ koordináta szimplex kétszeres $a_0 = m_6, a_3 = m_5$ csonkolásával keletkezik, de itt az eredeti [1] dolgozat ábráit és jelöléseit használtuk. Az új b^0, b^1, b^2, b^3 szimplex síkokat itt m_1, m_2, m_3, m_4 jelöli. Határozzuk meg a többi csúcs új szerepét is.

G_t^i as subgroups of Coxeter groups C_t



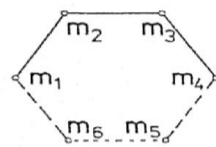
$$G(a_2) \quad a_0 = m_1 m_2 m_3$$

$$a_i = (m_1 m_2)^{-2i} a_0 (m_1 m_2)^{2i}$$

$$s_u = (m_1 m_2)^{q+2u} (m_5 m_4)$$

$$e = (m_1 m_2)^{-t} m_1 (m_1 m_2)^t (m_5 m_4)$$

$$p_i = (m_1 m_2)^{-(2i-1)} (m_6 m_5) \cdot (m_1 m_2)^{2i-1} (m_2 m_1)^{2u}$$



$$r_i = s_u p_i s_u$$

$$c_0 = m_1 (m_2 m_6 m_5) m_1$$

$$c_i = (m_2 m_1)^{2i} c_0 (m_2 m_1)^{2i}$$

$$d_i = e c_i e$$

$$\text{indices mod } q$$

$$-\cos \frac{\pi}{2q} \quad -\text{ch} \frac{OQ}{k} = -\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2q}}{4 \cos^2 \frac{\pi}{4}}}$$

$$-\text{ch} \frac{AH}{k} = -\frac{\cos^3 \frac{\pi}{2q}}{\cos \frac{\pi}{4}}$$

4-5. ábra. C_t tükrözéscsoport alaptartománya, mint kétszer csonkolt derékszögű szimplex és (C-Sch) diagramja

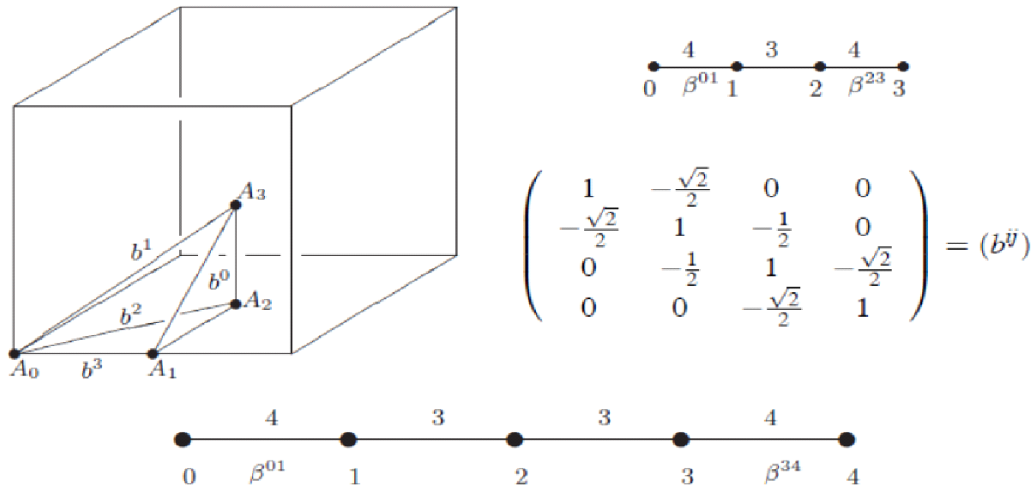
1. Táblázat. A fenti G_{tu}^1 és G_t^2 fundamentális csoportok prezentálása (megadása) generátorokkal és definiáló relációkkal

Table 1

Group	Generators		Relations (indices mod q)
	Glide reflections	Screw motions	
G_{tu}^1 $q=2t+1$ fixed $(t=1, 2, 3, \dots)$ u fixed $(u=0, 1, \dots, t)$	a_i $(i = -t, \dots, 0, \dots, t)$	s_u, p_i, r_i	$1 = a_{-t}^2 \dots a_0^2 \dots a_t^2 = (\alpha_{-t} s_u a_{u+1} s_u^{-1})$ $(\alpha_{-t+1} s_u a_{u+2} s_u^{-1}) \dots (\alpha_t s_u a_u s_u^{-1}) =$ $= p_i s_u r_i^{-1} s_u =$ $= a_i p_i a_i^{-1} r_i^{-1} = \quad i = -t, \dots, 0, \dots, t$ $= a_i r_i^{-1} a_i^{-1} r_i^{-1} p_i^{-1}$
G_t^2 $q=2t+1$ fixed $(t=1, 2, 3, \dots)$	e, a_i, c_i, d_i $(i = -t, \dots, 0, \dots, t)$		$1 = a_{-t}^2 \dots a_0^2 \dots a_t^2 = (\alpha_0 e a_t^{-1} e^{-1})$ $(\alpha_1 e a_{t-1}^{-1} e^{-1}) \dots (\alpha_{-1} e a_{-t}^{-1} e^{-1}) =$ $= a_i e d_i^{-1} e =$ $= a_i c_i a_i^{-1} d_{t+i} = \quad i = -t, \dots, 0, \dots, t$ $= a_i d_{-t+i}^{-1} a_{-t+i}^{-1} c_i^{-1}$

3. Az euklideszi kocka-kitöltés és jellemző (4, 3, 4) derékszögű $A_0A_1A_2A_3 = b^0b^1b^2b^3$ szimplexe, Coxeter-Schläfli diagram és matrix (illusztráció a későbbi analóg hiperbolikus projektív metrikához)

Az alábbi kocka-kitöltés jellemző $A_0A_1A_2A_3 = b^0b^1b^2b^3$ derékszögű szimplexéhez tartozó (b^{ij}) matrix valóban (+, +, +, 0) euklideszi szignatúrájú, ahogy az 1, 1/2, 1/4, 0 fő (minor) aldeterminánsok előjeleiből látszik. A későbbi analóg szignatúra az $u, v, w = u$ paraméterektől függ, és a \mathbf{H}^3 hiperbolikus teret (+, +, +, -) jellemzi, ahogy ezt később szükségszerűen biztosítani fogjuk.



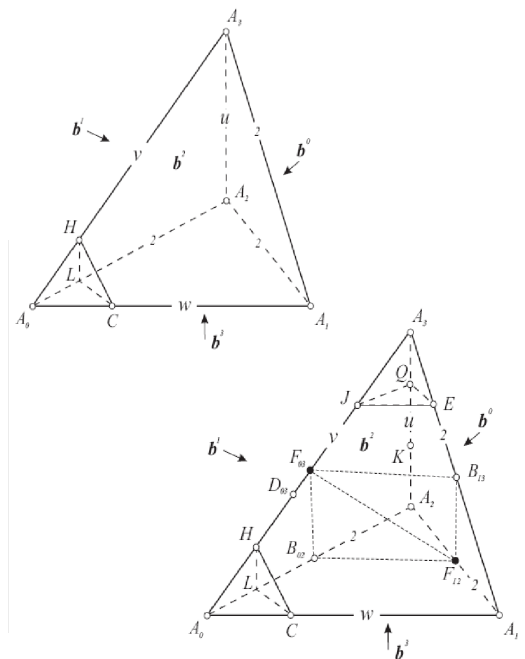
6. ábra. Az \mathbf{E}^3 euklideszi tér kockakitöltése szimbólumaival. Az \mathbf{E}^4 kockakitöltés (C-Sch) diagramja

$$(b^{ij}) = \langle b^i, b^j \rangle := \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{u} & 0 & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{u} & 1 & -\cos \frac{\pi}{v} & 0 \\ 0 & -\cos \frac{\pi}{v} & 1 & -\cos \frac{\pi}{w} \\ 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{w} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(a_{ij}) = (b^{ij})^{-1} = \langle a_i, a_j \rangle := \frac{1}{B} \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\pi}{w} - \cos^2 \frac{\pi}{v} & \cos \frac{\pi}{u} \sin^2 \frac{\pi}{w} & \cos \frac{\pi}{u} \cos \frac{\pi}{v} & \cos \frac{\pi}{u} \cos \frac{\pi}{v} \cos \frac{\pi}{w} \\ \cos \frac{\pi}{u} \sin^2 \frac{\pi}{w} & \sin^2 \frac{\pi}{w} & \cos \frac{\pi}{v} & \cos \frac{\pi}{w} \cos \frac{\pi}{v} \\ \cos \frac{\pi}{u} \cos \frac{\pi}{v} & \cos \frac{\pi}{v} & \sin^2 \frac{\pi}{u} & \cos \frac{\pi}{w} \sin^2 \frac{\pi}{u} \\ \cos \frac{\pi}{u} \cos \frac{\pi}{v} \cos \frac{\pi}{w} & \cos \frac{\pi}{w} \cos \frac{\pi}{v} & \cos \frac{\pi}{w} \sin^2 \frac{\pi}{u} & \sin^2 \frac{\pi}{u} - \cos^2 \frac{\pi}{v} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

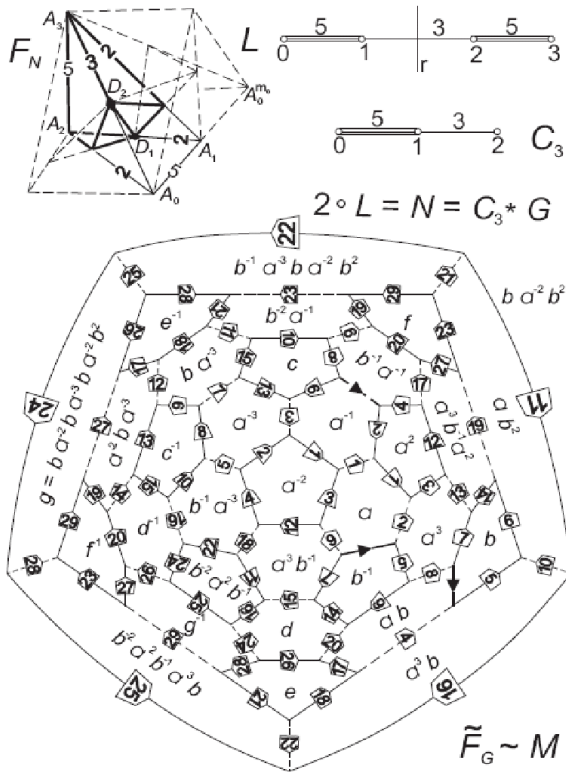
where

$$B = \det(b^{ij}) = \sin^2 \frac{\pi}{u} \sin^2 \frac{\pi}{w} - \cos^2 \frac{\pi}{v} < 0 \quad \text{or} \quad \sin \frac{\pi}{u} \sin \frac{\pi}{w} - \cos \frac{\pi}{v} < 0.$$



7. ábra. Az $(u, v, w(=u))$ paraméterű derékszögű (csonkolt) szimplex a hozzátartozó (C-Sch) matrix-szal biztosítja a (+, +, +, -) szignatúrájú skalárszorzatokat a formák (síkok) és vektorok (pontok) \mathbf{H}^3 geometriájában

3.1. Hiperbolikus futball sokaság



$M = H^3/G$ futball manifold
A "hiperbolikus futball" esetében
– $u = w = 5, v = 3$ – a C-Sch mátrix
szignatúrája valóban $(+, +, +, -)$.
Ellenőrizzük!

E. Molnár, (1988). Two hyperbolic
football manifolds. In: *Proceedings of
International Conference on Differential
Geometry and Its Applications*,
Dubrovnik Yugoslavia, 217–241.

E. Molnár, (2012). On non-Euclidean
crystallography, some football manifolds,
Struct Chem 23:1057–1069.

8. ábra. Az $\{5, 6, 6\}$ futball poliéder
származtatása az $(5, 3, 5)$ fél
derékszögű szimplex alapján

3.2. A derékszögű szimplex térfogata N. I. Lobacsevszkij ötlete alapján R. Kellerhals általánosításával

Az O (írott O , később is) derékszögű (csonkolt) szimplexet itt a $\alpha_{01} = \pi/u, \alpha_{12} = \pi/v, \alpha_{23} = \pi/w$ lényeges szögek jellemzik, ezek meghatározzák a θ (görög theta) "segédszöget", és ezeket az L (írott L) (nem elemi) Lobacsevszkij függvénybe helyettesítjük a $\text{Vol}(O)$ térfogat kiszámításához.

Theorem 2.2 (R. Kellerhals) *The volume of a three-dimensional hyperbolic complete orthoscheme $\mathcal{O} = W_{uvw} \subset H^3$ is expressed with the essential angles $\alpha_{01} = \frac{\pi}{u}, \alpha_{12} = \frac{\pi}{v}, \alpha_{23} = \frac{\pi}{w}, (0 \leq \alpha_{ij} \leq \frac{\pi}{2})$ (Fig. 1.a, b) in the following form:*

$$\text{Vol}(\mathcal{O}) = \frac{1}{4} \{ \mathcal{L}(\alpha_{01} + \theta) - \mathcal{L}(\alpha_{01} - \theta) + \mathcal{L}(\frac{\pi}{2} + \alpha_{12} - \theta) + \\ + \mathcal{L}(\frac{\pi}{2} - \alpha_{12} - \theta) + \mathcal{L}(\alpha_{23} + \theta) - \mathcal{L}(\alpha_{23} - \theta) + 2\mathcal{L}(\frac{\pi}{2} - \theta) \},$$

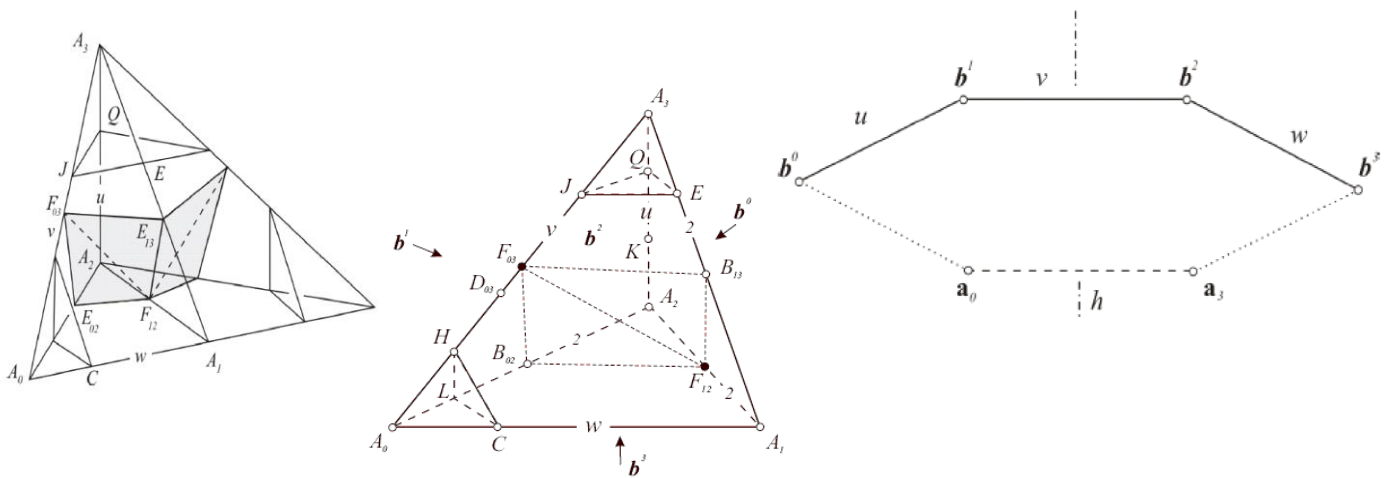
where $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ is defined by:

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha_{12} - \sin^2 \alpha_{01} \sin^2 \alpha_{23}}}{\cos \alpha_{01} \cos \alpha_{23}},$$

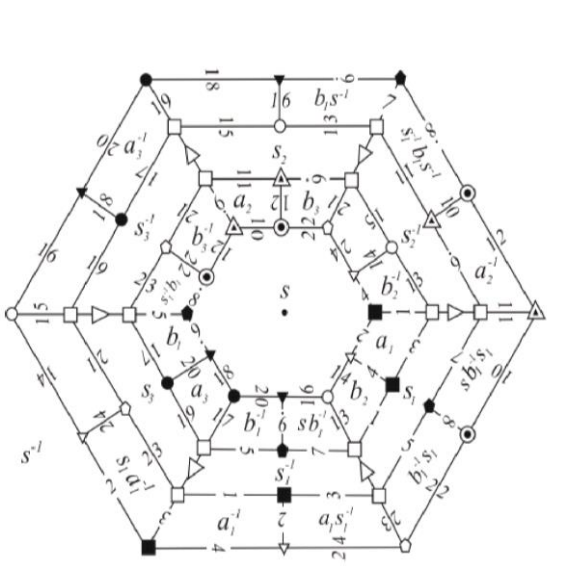
and where $\mathcal{L}(x) := - \int_0^x \log |2 \sin t| dt$ denotes the Lobachevsky function.

4. Irányítható pókháló (vagy cső-szerű) sokaság-sorozat szerkesztése és származtatása, szemléltetése a W fél csonkított derékszögű szimplex alapján, $2z = u = v = w \geq 6$ esetén

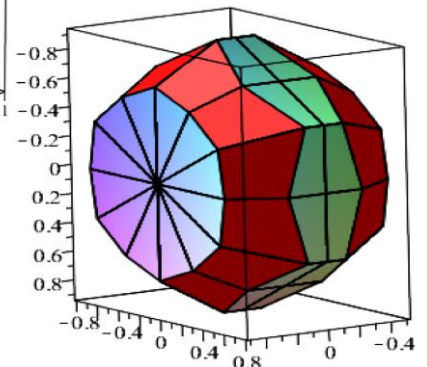
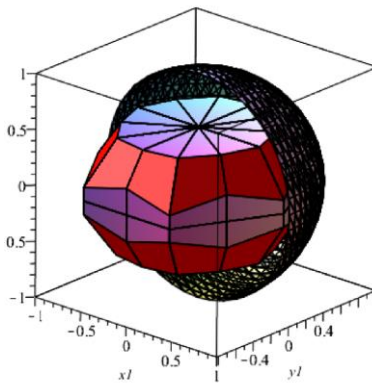
Ha a derékszögű szimplexre ($u, v, w = u - (1/u) + (1/v) < 1/2$ feltétellel); akkor A_0 és A_3 külső csúcsok, és a_0 , illetve a_3 polár síkjaikkal csonkítva, félforgással szimmetrikus kompakt poliédert kapunk (következő 9-11 ábrák, a Coxeter diagrammal). A lenti tétel és a 12. ábra mutatja a poliédert és lapjainak párosítását. „The cobweb manifold $Cw(6,6,6)$ has been constructed by face identification. The fundamental group $Cw(6,6,6)$ can be described by 3-generators and three relations in formulas. The volume of $Cw(6,6,6)$ is ~ 8.29565 . The largest ball contained in $Cw(6,6,6)$ is of radius $r \sim 0.57941$. The diameter of $Cw(6,6,6)$ in $2R \sim 3.67268$.”



9-11. ábrák. Sokaság sorozat a W fél csonkított derékszögű szimplex alapján



12. ábra. A $Cw(6)$ pókháló (cső-szerű) sokaság szerkesztése trükkös lappárosító azonosításokkal az előző Q pont Dirichlet-Voronoi ($D-V$) cellájával



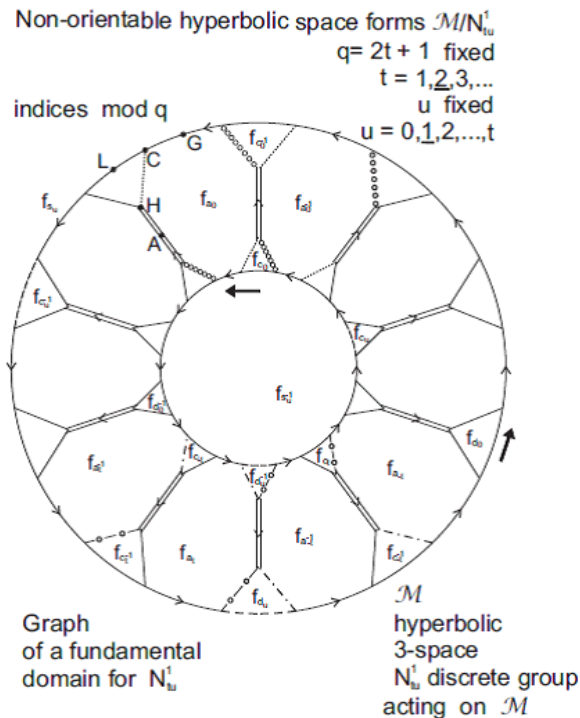
13. ábra. Képek a $Cw(6)$ pókháló (cső-szerű) sokaság animációjából a H^3 hiperbolikus tér $B-C-K$ modelljében

5. Függelék: nem-irányítható hiperbolikus térformák végtelen sorozatának szerkesztése, mint eredeti szándék

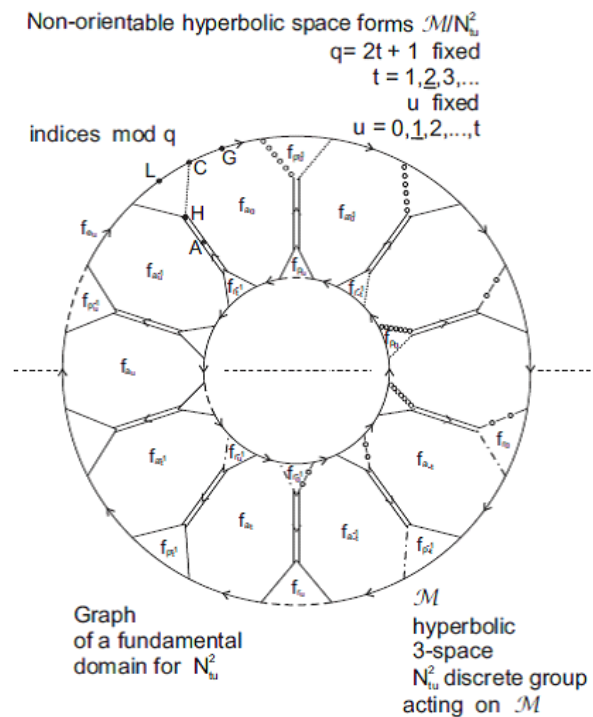
Ebben részben röviden kifejtem, hogyan javítottam ki, hamarosan azt a hibát [2] (melyet 40 évig senki nem vett észre), ami a fenti 40 évvel későbbi kémiai felfedezés magyarázatához vezetett. Nevezetesen, a fent kétszeresen lyukasított (majdnem) sokaságokból a trükkös lappárosítás módosításával sikerült kiküszöbölni a fixpontokat. Valóban, "csupán" a C és D pontokat és környezeteiket kellett alkalmasan "összeragasztani" úgy hogy a $C = D$ pontpályának teljes labda-környezete lett. És ez minden további pontra is teljesül, ahogy a sokaságtól azt megkívánjuk.

"Kicsit változtatjuk" az előző G_{tu}^1 csoport lappárosítását: A korábbi p és r csavarmozgás-azonosításokat c és d eltolás-tükrözésekre cseréljük. Így $C = D$ összeragasztást érünk el, és valóban M/N_{tu}^1 (Itt $M := H^3$) nem-irányítható hiperbolikus térformát kapunk (ellenőrizzük!).

Hasonlóan, G_{tu}^2 -ben (általánosabban, mint korábban) a c , d eltolás-tükrözéseket p , r csavarmozgásokra cserélve, így $C = D$ ragasztással, nem-irányítható M/N_{tu}^2 (itt $M = H^3$) térformákat nyerünk. Nem-irányítható hiperbolikus N_{tu}^1 és N_{tu}^2 térforma-sorozataink fundamentális csoportjainak algoritmikus prezentálása, és az irányítható kétszeres fedés G_t csoportja (magyarul, mint a 2. Táblázatban).



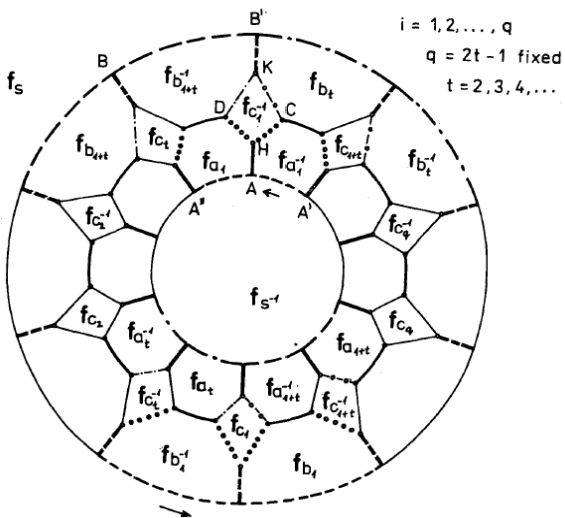
14. ábra. Hasonlítsuk össze a H^3/G_{tu}^1 (majdnem) (itt $C = D$) sokasággal



15. ábra. Vessük össze H^3/G_t^2 -vel

2. Táblázat Nem-irányítható hiperbolikus H^3/N_{tu}^1 és H^3/N_{tu}^2 térforma-sorozataink és H^3/G_t irányítható kétszeres fedésük

Csoport	Generátorok		Definiáló relációk (az indexek mod q)
	Eltolástükörzés	Csavarmozgás	
N_{tu}^1 $q = 2t + 1$ rögzített ($t = 1, 2, 3, \dots$) u rögzített ($u = 0, 1, 2, \dots, t$)	a_i, c_i, d_i ($i = -t, \dots, 0, \dots, t$)	s_u	$1 = a_{-t}^2 \dots a_0^2 \dots a_t^2 = (a_{-t} s_u a_{u+1} s_u^{-1}) (a_{-t} s_u a_{u+2} s_u^{-1}) \dots$ $\dots (a_t s_u a_u s_u^{-1}) = c_t s_u d_t^{-1} s_u =$ $= a_t c_t a_{-t} d_{u-t-t}$ $i = -t, \dots, 0, \dots, t$ $= a_t d_{u+t-t}^{-1} a_{-t} c_t^{-1}$
N_{tu}^2 $q = 2t + 1$ rögzített ($t = 1, 2, 3, \dots$) u rögzített ($u = 0, 1, 2, \dots, t$)	e_u, a_i ($i = -t, \dots, 0, \dots, t$)	p_i, r_i	$1 = a_{-t}^2 \dots a_0^2 \dots a_t^2 = (a_u e_u a_u^{-1} e_u^{-1}) (a_{u+1} e_u a_{u-1} e_u^{-1}) \dots$ $\dots (a_{u+q-1} e_u a_{u-q+1} e_u^{-1}) = p_t e_u r_t^{-1} e_u =$ $= a_t p_t a_{t-u}^{-1} r_{3u-t+1}$ $i = -t, \dots, 0, \dots, t$ $= a_t r_{3u-t}^{-1} a_{t-u}^{-1} p_t^{-1}$
G_t $q = 2t - 1$ rögzített ($t = 3, 4, \dots$)		$s; s_i; p_i; r_i$ ($i = 1, 2, \dots, q$)	$1 = s_1^2 s_2^2 \dots s_q^2 = s_1 s s_{1+t} s s_2 s s_{2+t} s \dots s_t s =$ $= s_1 s^{-1} s_{1+t} s^{-1} s_2 s^{-1} s_{2+t} s^{-1} \dots s_t s^{-1} =$ $= p_t s r_t^{-1} s = s_i p_i^{-1} s_i^{-1} r_{i+t-1}$ $i = 1, 2, \dots, q$ $= s_t r_{i+t}^{-1} s_i^{-1} p_t$



16. ábra. Az előbbi M/N_{tu}^1 ($u = 0$), (itt $C = D$).
Másolat az eredeti hibajavításból [2]

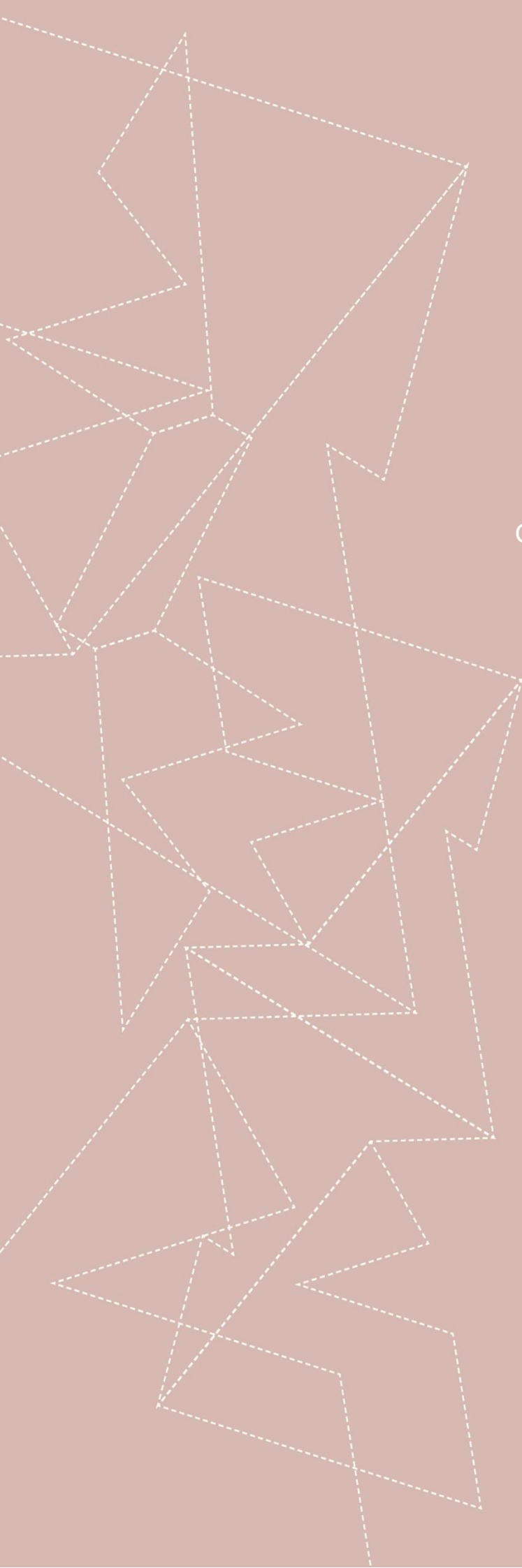
Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom: Dr. PROK István és Dr. SZIRMAI Jenő kollégáimnak sokéves gyümölcsöző tudományos együttműködésükért; Dr. BENDE Ede sakktársamnak és Dr. HARGITTAI István akadémikusnak a kémiai konzultációkért, tanácsokért; Dr. SZIRMAI Jenőnek az előadás és a kézirat technikai előállításáért.

Hálával és szeretettel gondolok Dr. SZENTHE János Professzor Kollégámra (1933-2023) és Mesteremre a differenciál-geometriában, aki ~40 évvel ezelőtti [1], [2] publikációimat ösztönözte és támogatta.

Irodalomjegyzék

- [1] Molnár, E., (1987). Twice punctured compact Euclidean and hyperbolic manifolds and their two folds coverings, *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai*, 46. *Topics in Differential Geometry, Debrecen (Hungary)*, 1987, 883- 919.
- [2] Molnár, E., (1984). An infinite series of compact non-orientable 3-dimensional space forms of constant negative curvature, *Ann. Global Anal. Geom.*, Vol. 1. No. 3, (1983), 37-49; Errata in Vol. 2, No. 2, (1984), 253-254.
- [3] *International Tables for Crystallography*, Vol. A: *Space-Group Symmetry*, Ed. Theo Hahn, First Edition 1983, Fifth Edition 2002, Corr. Reprint 2005, Vol. A1: *Symmetry Relations between Space Groups*, Eds. Hans Wondratschek and Ulrich Müller, First Edition 2004.
- [4] *The Nobel Prize in Chemistry 2023. The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award the Nobel Prize in Chemistry 2023 to Mounqi G. Bawendi, Louis E. Brus and Aleksey Yekimov "for the discovery and synthesis of quantum dots"*, PRESS RELEASE, 4 October 2023.
- [5] Molnár, E., (2012). On non-Euclidean crystallography, some football manifolds, *Structural Chemistry*, 23/4, 1057-1069.
- [6] Molnár, E., (2024). Twice punctured Euclidean and hyperbolic manifolds, revisited as hypothetical *explanation for quantum dots*, submitted manuscript.
- [7] Molnár, E. – Szirmai, J., (2010). Symmetries in the 8 homogeneous 3-geometries, *Symmetry Cult. Sci.*, 21/1-3, 87-117.
- [8] Molnár, E.–Szirmai, J., (2020). Infinite series of compact hyperbolic manifolds, as possible crystal structures. *Matematički Vesnik*, 72, 3, 257-272.
- [9] Molnár, E. – Szirmai, J., (2024). Dense ball packings by tube manifolds as new models for hyperbolic crystallography, *Matematički Vesnik* 76, 1–2, 118–135.
- [10] Vinberg, E. B. (1993). (Ed.), *Geometry II. Spaces of Constant Curvature*, Springer Verlag Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo - Hong Kong - Barcelona - Budapest.
- [11] Wolf, J. A., (1967). *Spaces of Constant Curvature*, McGraw-Hill, New York, (Russian translation: Izd. "Nauka" Moscow, 1982).



Geometriai kihívások a faépítészetben

SZABÓ PÉTER

Geometriai kihívások a faépítészetben

SZABÓ Péter

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Kreatívipari Intézet,
email: szabo.peter@uni-sopron.hu

Absztrakt

A faszervezetek tervezése és kivitelezése, az építőiparban a összetett geometriai ismereteket igényel. Egy ácsszerkezet vagy fakötés elkészítése ábrázoló geometriai ismeretek nélkül, még a számítógépes 3D tervező programok használatával is kihívást jelent. A faépítészetrel foglalkozó mérnökök oktatásakor külön hangsúlyt kell kapnia a térbeli tervezés képességének. Figyelembe kell venni az inhomogén anyagot, az alakváltozásokat és a terhelési eseteket. A modern robottechnika és az alapanyag könnyű megmunkálhatósága olyan geometriai szerkezetek gyártását is lehetővé teszi, ami eddig elképzelhetetlen volt az építészetben. Az innovatív faépítészet új kihívások elé állítja az oktatókat, hallgatókat és a szakma valamennyi résztvevőjét. A térbeli tervezéshez elengedhetetlen a térlátás fejlesztése, a számítógépes programok, virtuális valóság és a mesterséges intelligencia használata.

Kulcsszavak: faépítészet, ábrázoló geometria, 3D programok, virtuális valóság, oktatás

Geometric challenges in timber architecture

Péter SZABÓ

Department of Creative Industries, Faculty of Wood Engineering and Creative Industries, University of Sopron, Sopron, Hungary, email: szabo.peter@uni-sopron.hu

Abstract

The design and construction of timber structures in the construction industry requires complex geometric knowledge. It is challenging to design a carpentry or timber frame without a knowledge of descriptive geometry, even using 3D computer design programs. The ability to design spatially should be a particular focus in the education of engineers working in timber construction. Inhomogeneous material, deformation and load cases should be considered. Modern robotics and the ease with which the material can be worked make it possible to create geometric structures that were previously unthinkable in architecture. Innovative timber architecture presents new challenges to teachers, students and all those involved in the profession. Spatial design requires the development of spatial vision, the use of computer programs, virtual reality and artificial intelligence.

Keywords: timber architecture, descriptive geometry, 3D software, virtual reality, education

1. Bevezetés

Az térképek, épületek ábrázolása több mint ötezer évre nyúlik vissza. Olyan rajzok, tervek, amik az kivitelezést segítették azonban csak nagyon ritkán kerültek elő a történeti korokból. A faszerkezetek dokumentálása, azok összetettsége miatt, külön kihívást jelentett az ábrázolások terén. Az egyik legkorábbi ismert faszerkezeteket bemutató dokumentáció, Yingzao Fashi (Építési Szabványok Könyve) a Song-dinasztia idején, 1103-ban jelent meg Kínában, és Li Jie császári hivatalnok állította össze (1. ábra). Ez a mű a hivatalos építési szabványokat foglalta össze, célja az építési folyamatok szabványosítása volt a nyersanyagokkal és munkaerővel való takarékoskodás érdekében. A Yingzao Fashi nem csupán technikai útmutatót nyújtott, hanem egy szimbolikus rendszert is alkotott, amelyben az építészet erkölcsi és politikai értékeket tükrözött [1]. A korai dokumentációk általában részletes leírásokkal, szabályokkal és metrikus előírásokkal szolgáltak, amelyek lehetővé tették az építmények pontos és következetes felépítését. A Yingzao Fashi például tizenhárom rendszert határozott meg, amelyek lefedték az alapozástól a szerkezet építésig, az ács- és kőművesmunkáig minden fontos építési területet. Az épületelemek megnevezésekor a kézművesek sokszor metaforákat és botanikai kifejezéseket használtak, például a konzolokat virágokra és ágakhoz hasonlították, ezzel erősítve az építészeti elemek vizuális jelentését és kulturális vonatkozásait. A többször másolt műnek több ábrája is fennmaradt, szemléletes "axonometrikus" ábrákkal szemléltetve az egyes fa alkatrészeket és csomópontokat. Ez a korai dokumentáció nemcsak az építészeti tudás rendszerezésében volt úttörő, hanem megteremtette a modern építészeti dokumentáció alapjait is.

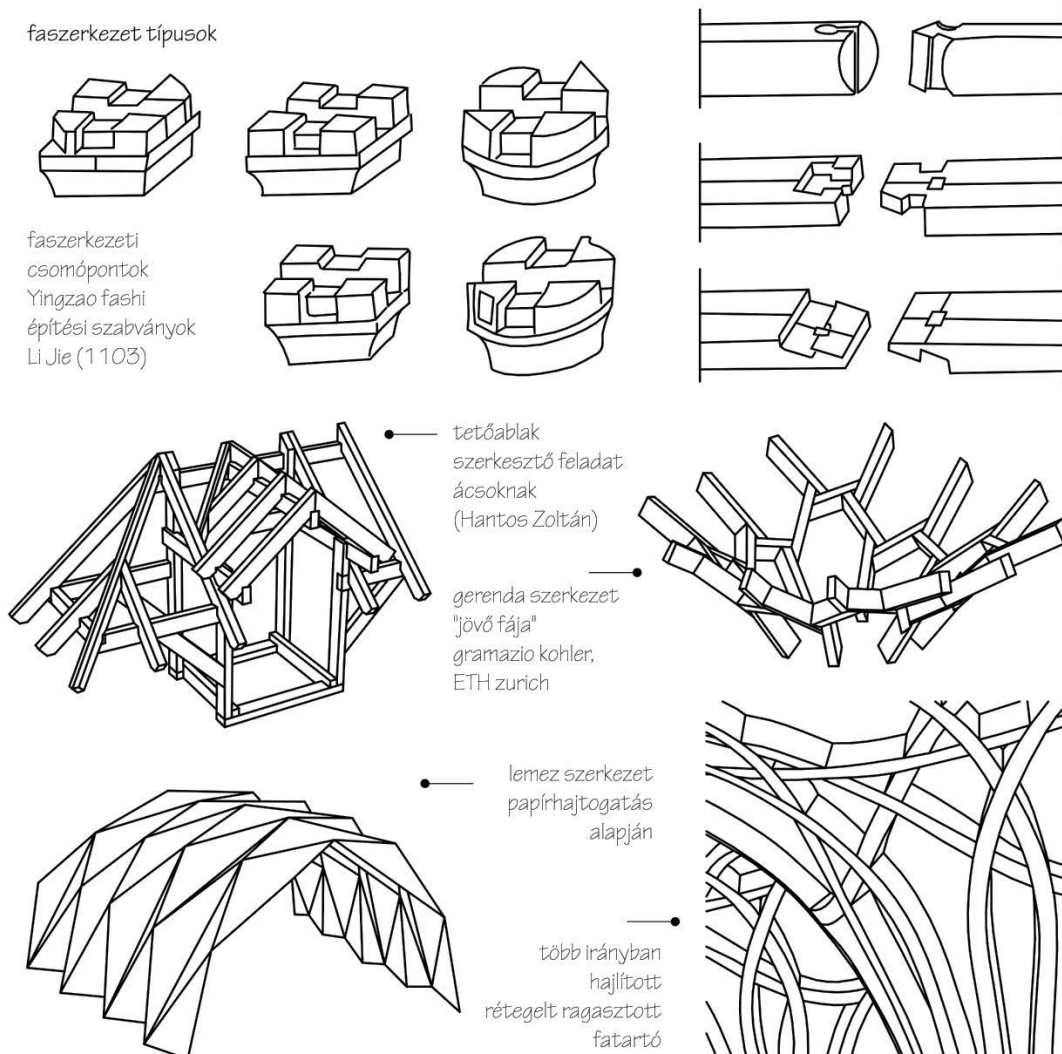
Az elkövetkező évszázadok mind sorra letették a kézjegyüket a tervek dokumentálásával és a térbeli megjelenítéssel kapcsolatban. A "modern" mérnöki munkát a Monge vetítési rendszer és az ábrázoló geometria kialakulása tette lehetővé. Ezek a "módszerek" mind a mai napig szerves részét képezik a mérnöki oktatásnak és a kivitelezési gyakorlatnak. A CAD rendszerek és a CNC technológiák egyre kisebb teret adnak a hagyományos geometriai szerkesztéseknek és a hagyományos kivitelezésnek. A magánépítkezések során az ácsok és bádogosok mind a mai napig használják az ábrázoló geometriát a csomópontok vagy a zsinórpád elkészítésénél. Az ácsipari CNC-k azonban előrevetítik, hogy a "hagyományos" szakipari munkák és a megtanult geometriai tudás eltűnében van.

2. Modern faszerkezetek

Az elmúlt években az építőanyagok és szerkezetek terén komoly változások történtek. A faépítészetben a gerendákat és oszlopokat már régen felváltották a ragasztott fatartók, amiket már nem csak síkban tud "meghajlítani" a gyártó. A lapszerkezetek használata is gyakoribbá vált a kereszt laminált (CLT) táblák előretörésével. A hagyományos fakötéseket régen felváltották a méretezhető, mérnöki kötések. A CAD rendszerek, véglegesem méretező programok parametrikus tervezés és a robot technológia mára olyan szintet ért el, hogy eddig elképzelhetetlen konstrukciók kerülnek le a tervezőasztalokról. Ezek a formák, kapcsolatok, szerkezetek már nem jeleníthetők meg egy "hagyományos" kiviteli tervdokumentációban (2. ábra). Ezek a szerkezetek nem ábrázolhatóak a Monge képsíkokban, és az ábrázoló geometria sem jelent segítséget a térbeli megjelenítésben. A mérnökök képzése során a szemlélet átadásán túl már nincs gyakorlati szerepe a klasszikus tervdokumentáció készítésének.

2.1. Rúdszerkezetek

A szabadon formált felületek lefedése és alátámasztása rúdszerkezetekkel nagyfokú rugalmasságot biztosít, mivel a rudak különféle irányokban és szögben helyezhetők el (1. ábra), hogy kövessék a felület alakját. A rúdszerkezetek könnyen alkalmazkodnak a bonyolult, organikus formákhoz, mivel az egyes rudak összekapcsolásával egy rugalmas, hálószerű struktúra alakítható ki [2]. Az ilyen szerkezetek kialakításakor fontos, hogy a rudak találkozási pontjait precízen tervezzük meg, mivel ezek a csomópontok határozzák meg az egész szerkezet stabilitását. A digitális modellezés és parametrikus tervezés segítségével a tervezők képesek pontosan meghatározni a rúdkomponensek hosszát és szögét, hogy az illeszkedés és a szerkezeti integritás is garantált legyen [+]. A modern faszervezetekben a rúdszerkezetek különösen hasznosak lehetnek könnyű és gyorsan szerelhető rendszerek kialakításához. A szerkezet állhat akár teljesen különböző méretű és formájú egyenes rudakból. Ilyen szerkezet dokumentálása elvben történhet a hagyományos 2D-s tervlapok formájában, azonban a csomóponti elemek már túlmutatnak a hagyományos technikákon. A kivitelezés, állványozás is nehezen képzelhető el a robottechnológia nélkül.

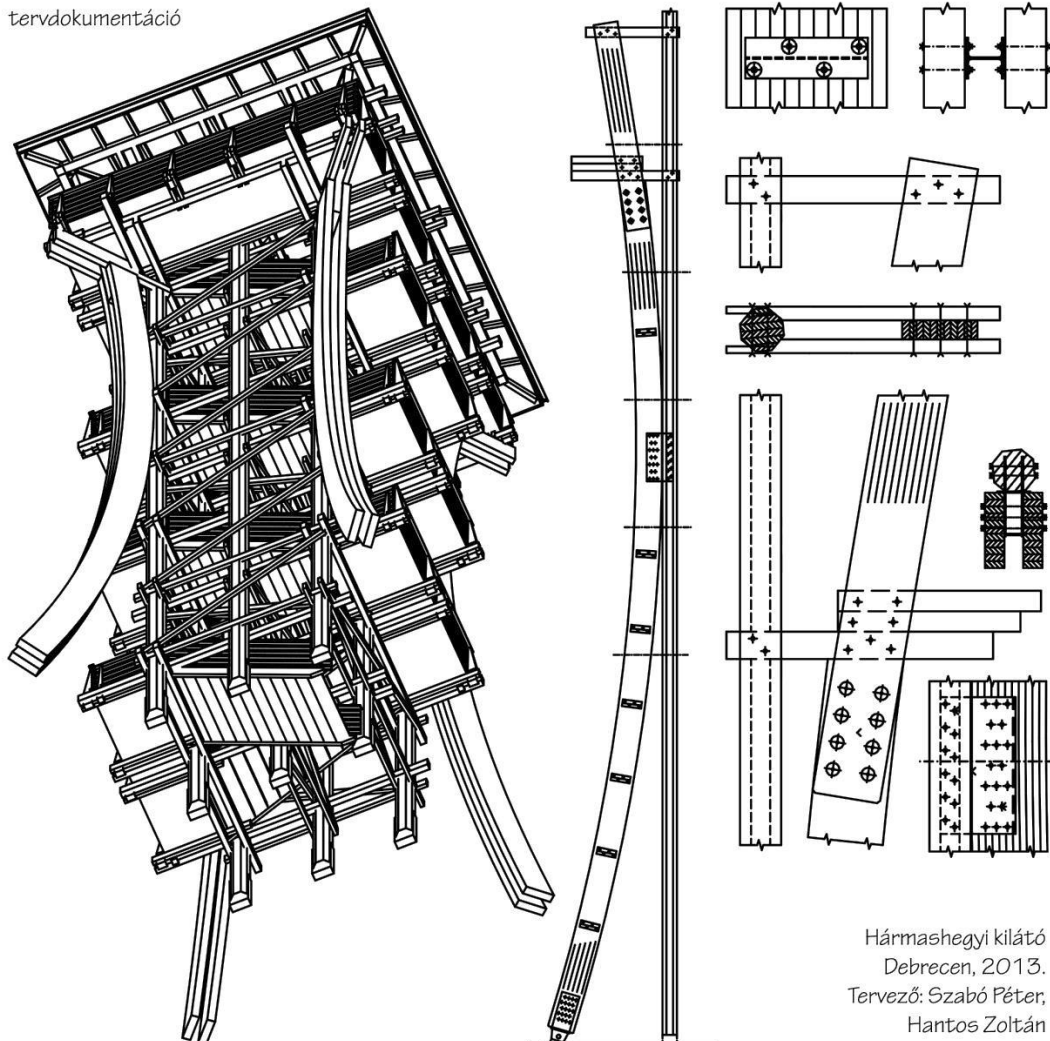


1. ábra. Faszervezet típusok [5]

2.1. Lapszerkezetek

A lapszerkezetek a szabadon formált felületek lefedésének és alátámasztásának másik fontos eleme, különösen ott, ahol nagy, összefüggő felületek szükségesek. A lapokkal való szerkesztés lehetőséget ad arra, hogy egyedi formájú és mintázatú burkolatokat hozzunk létre, amelyek megőrzik a felület folytonosságát. A lapszerkezetek tervezésénél kulcsfontosságú a lapok pontos vágása és összeillesztése, különösen, ha különböző szögben kapcsolódnak egymáshoz (1. ábra). A digitális szimuláció lehetővé teszi, hogy a lapokat pontosan az előírt szögben vágják, valamint a lapok közötti csatlakozások stabilitását optimalizálják. A gerenda csatlakozások geometriai egyszerűsége lehetővé teszi, hogy a robotizált gyártás során egyedi, mégis könnyen összeilleszthető elemekből álló szerkezetek jöjjenek létre. A modellezési algoritmusok lehetőséget nyújtanak a terhelési adatok valós idejű figyelembevételére, ezáltal az elemek mérete és helyzete az aktuális terhelési igények szerint változtatható, ami hozzájárul a szerkezeti hatékonyság növeléséhez. A lapszerkezetek alkalmazása különösen hatékony a nagy ívű és organikus formák [3], például kupolák vagy "hullámzó" tetőszerkezetek kialakításában.

tervdokumentáció



Háromshegyi kilátó
Debrecen, 2013.
Tervező: Szabó Péter,
Hantos Zoltán

2. ábra. Hagyományos kiviteli tervdokumentáció

Az egyes lap elemek 2D tervei elkészíthetőek, azonban az oldalak fogazása, szögbevágása már kivitelezhetetlen CNC-technológia nélkül. Ezekben a rendszerekben az egyes elemek közötti csomópontok vizualizációja nem csupán az építészeti tervezés szempontjából kritikus, hanem a szerkezeti stabilitás és a gyártás megvalósíthatóságának elemzéséhez is alapvető. A lapszerkezetek vizualizálásának egyik fő kihívása, hogy a hagyományos kétdimenziós rajzok és a háromdimenziós modellek gyakran nem elegendők a szerkezetek bonyolult geometriájának teljes értelmezéséhez. Ehelyett olyan digitális szimulációs és megjelenítési technológiák szükségesek, amelyek lehetővé teszik az interaktív modellezést és az anyagszerkezetek közvetlen manipulálását a tervezési folyamat során.

2.2. Íves gerendák

Az íves gerendákkal való alátámasztás a szabadon formált felületek egyik legrégebbi és legmegbízhatóbb megoldása, különösen olyan struktúrák esetében, amelyek nagy terhelést kell, hogy elviseljenek. Az íves gerendák lehetővé teszik a terhelés egyenletes elosztását, és stabil alátámasztást nyújtanak a felület bármely pontján. A modern faépítészetben az íves gerendák azonban akár több irányba is lehetnek hajlítottak, ezzel kilépve a 2D dokumentációk területéről (1. ábra). A több irányba hajlított ragasztott gerendák lehetővé teszik, hogy szokatlan, aszimmetrikus és egyedi formák, felületek jöjjenek létre. Az íves gerendák pontos alakját a számítógépes modellezés segíti, amely lehetővé teszi a tervezők számára, hogy a gerendák alakját és dőlésszögét a terheléshez igazítsák. Ennek köszönhetően olyan szerkezetek hozhatók létre, amelyek nemcsak vizuálisan lenyűgözőek, hanem hatékonyan képesek kezelni a különböző irányú terheléseket is.

3. Új technológiák

3.1. Robotika

A robotika alapvető szerepet játszik a modern faépítészeti szerkezetek létrehozásában, különösen ott, ahol az elemek geometriai sokfélesége és a különleges kapcsolódási pontok miatt nagyfokú rugalmasságra van szükség. A legmodernebb faszervezetek kivitelezései robotizált folyamatokon alapulnak, ahol a robotok minden elemet egyedileg vágják méretre és az előre meghatározott helyzetükbe helyezik. Ez a „szekvenciális robotizált gyártás” [3] lehetővé teszi, hogy az egyes elemek egyenként, valós időben kerüljenek feldolgozásra és összeállításra, csökkentve a geometriai eltérésekből adódó problémákat. A robotizált rendszerek precíziós mozgásvezérlése, valamint a többtengelyes forgatás és pozicionálás biztosítja, hogy minden elem az előre meghatározott pontossággal és szögben illeszkedjen.

3.2. Virtuális valóság

Az innovatív VR technológiák lehetőséget adnak arra, hogy a tervezők, mérnökök és ügyfelek interaktívan felfedezzék a digitális modelleket, még a tényleges építési folyamat megkezdése előtt. Ez nem csupán vizuális élményt nyújt, hanem lehetővé teszi a szerkezeti rendszerek, csatlakozások és különféle építési szempontok részletes vizsgálatát, ami jelentősen megkönnyíti az esetleges problémák időbeni feltárását és javítását.

A VR környezet segíti az iteratív tervezési folyamatot, ahol minden elem elhelyezkedése és orientációja azonnal ellenőrizhető és módosítható. A virtuális térben megjelenített szerkezetek révén a tervezők és gyártók részletesen megvizsgálhatják az egyes elemek beépítési sorrendjét és kapcsolódási pontjait. A VR-szimulációk révén a tervezők és mérnökök a robot mozgási pályáit is előzetesen ellenőrizhetik, ezáltal biztosítva a zavartalan és pontos gyártási folyamatot.

3.3. Mesterséges intelligencia

Az MI alapú generatív tervezési eszközök a tervezési folyamat egyik legizgalmasabb fejlesztését jelentik. Ezek az eszközök képesek különféle szerkezeti és geometriai paraméterek alapján létrehozni és módosítani a digitális modelleket, így a tervezők számos különböző megoldási lehetőséget vizsgálhatnak, mielőtt a végleges struktúrát kiválasztanák. Az egyszerű elemekből álló, robotizált gyártási folyamatra optimalizált fa szerkezetek esetében az MI segít abban, hogy a tervezők különböző, egymástól eltérő formaterveket gyorsan, költséghatékonyan és nagy precizitással valósítsanak meg. Az algoritmusok lehetőséget adnak arra, hogy figyelembe vegyék az egyes elemek méretét, alakját, illeszkedését és teherbírását, így optimalizálva az anyagfelhasználást és csökkentve a hulladékot. Az MI-algoritmusok segítenek abban, hogy a robotok optimális mozgási útvonalakat és szerelési sorrendeket válasszanak, figyelembe véve az adott szerkezet és a gyártási folyamat sajátosságait. Az MI képes valós idejű visszajelzést adni a robotok számára, amely csökkenti az emberi beavatkozás szükségességét, így gyorsítva a teljes gyártási folyamatot és csökkentve a hibák esélyét.

4. Összegzés

4.1. Dokumentáció

A modern faszerkezetek dokumentálása jelentős átalakuláson ment keresztül, mivel a hagyományos műszaki rajzok már nem nyújtanak elegendő támogatást a komplex geometriai formák létrehozásához és a gyártási folyamatok pontos irányításához. A faépítészet egyre összetettebb formákat igényel, amelyek a digitális tervezési technológiák és a robotizált gyártás előnyeire építenek. A háromdimenziós (3D) modellezés és a digitális tervezési eszközök integrálása elengedhetetlenné vált, különösen az olyan szerkezetek esetében, amelyek nem standardizáltak, egyedi elemekből épülnek fel, mint például az algoritmusok által tervezett vagy parametrikus tervezési módszerek által készített szerkezetek. A 3D tervezés lehetővé teszi az egyes faelemek pontos geometriai és szerkezeti jellemzőinek megjelenítését, beleértve a csatlakozási pontokat és a hajlítási paramétereket. A digitális modellben az elemek pontos pozicionálása és orientációja meghatározható, így a teljes gyártási folyamat előre megtervezhető és ellenőrizhető.

4.2. Robottechnika

A robottechnológia szerepe elengedhetetlen, mivel lehetővé teszi a digitális modellek alapján történő automatikus, nagy pontosságú kivitelezést. A modern robotizált rendszerek képesek a legkisebb geometriai eltérések kezelésére is, valamint az összetett kapcsolódások pontos és gyors összeállítására, amelyeket kézi módszerekkel nehezen lehetne kivitelezni [3].

A robotizált gyártás különösen előnyös az egyedi elemek gyártásánál, ahol minden alkatrész egyedi méreteket és orientációt igényel. Összességében a 3D tervek és a robotizált gyártástechnológia nemcsak a modern faszerkezetek gyártásának pontos dokumentációját teszik lehetővé, hanem a fenntarthatósági célok elérését is támogatják az optimalizált anyagfelhasználás révén [4]. A műszaki rajzok és kétdimenziós ábrázolások önmagukban már nem képesek kezelni a mai építészeti és mérnöki követelményeket; a teljes digitális folyamat szükséges ahhoz, hogy egy modern faépítészeti terv valóra váljon.

4.3. Oktatás

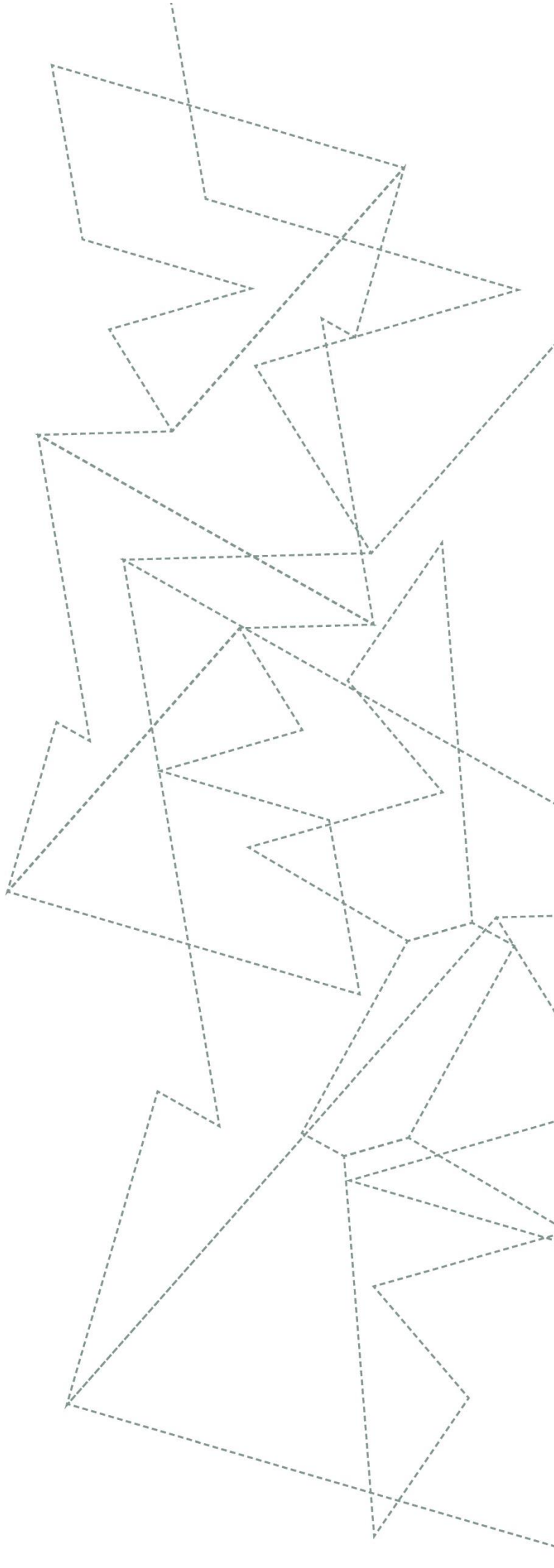
Ahhoz, hogy a jövő építészei és mérnökei teljes mértékben kihasználhassák a robotizált technológia adta lehetőségeket, elengedhetetlen, hogy már a képzés során elsajátítsák a robotok által segített gyártási folyamatokat és programozási alapelveket. A gyakorlati oktatásban a robotizált rendszerek használata lehetőséget ad a hallgatóknak, hogy valós időben követhessék és beállíthassák a robotok mozgását, valamint megtanulják, hogyan optimalizálhatók az egyes elemek és csomópontok illesztései. Az oktatás így biztosítja a robotika alapjainak megértését és alkalmazását, ami hozzájárul az innovatív építési technológiák széles körű elterjedéséhez és a digitális tervezés, valamint a fenntartható gyártás jövőjének alakításához.

Az építészeti és mérnöki oktatás számára a VR új horizontokat nyit a komplex szerkezeti rendszerek megismerésében. A VR-élmények révén a hallgatók valósághű környezetben tanulmányozhatják a szerkezetek működését és stabilitását, valamint a kapcsolódások és csomópontok pontos részleteit. Ez különösen hasznos az ábrázoló geometria és a digitális tervezés tanulása során, mivel a hallgatók így valós időben vizsgálhatják az elméleti ismeretek gyakorlati alkalmazását. A VR-technológiák beépítése az oktatásba tehát elősegíti az interaktív tanulást, amely alapvető készségeket nyújt a jövő mérnökei és tervezői számára. Az MI lehetőséget nyújt a hallgatóknak arra, hogy megismerjék és gyakorolják a generatív tervezési és optimalizációs módszereket, valamint betekintést nyerjenek a robotizált gyártás és a prediktív elemzések világába. Az ilyen képzések lehetővé teszik, hogy a jövő szakemberei ne csak passzív használói, hanem aktív fejlesztői is legyenek a mesterséges intelligenciával támogatott eszközöknek, és képesek legyenek komplex tervezési és gyártási problémákat megoldani. Az MI alapú megközelítések integrálása az oktatásba biztosítja, hogy a jövő mérnökei felkészültek legyenek a digitális és automatizált építési technológiák kihívásaira.

Az oktatás számára ezek a fejlesztések új kihívásokat jelentenek. Az ábrázoló geometria, a digitális tervezés és a parametrikus modellezés integrálása az építészeti képzésekbe elengedhetetlen annak érdekében, hogy a következő generáció tervezői és mérnökei megfelelő kompetenciákkal rendelkezzenek a komplex faszerkezetek megvalósításához. Az ácsok és bádogosok hagyományos, kézi szerkesztési módszereit kiegészítve a digitális technológia új készségeket követel meg, amelyek a geometriai alapok mellett a térbeli gondolkodás és a számítógépes szimulációk mélyebb megértését is igénylik. Az oktatási intézmények számára kihívás, hogy a diákok számára gyakorlati és elméleti szempontból is átfogó tudást nyújtsanak, amely egyaránt kiterjed a hagyományos kézműves technikákra és a legújabb technológiai megoldásokra.

Irodalomjegyzék

- [1] Feng, J. (2012). *Chinese Architecture and Metaphor: Song Culture in the Yingzao Fashi Building Manual*. University of Hawaii Press.
- [2] Tang, G., & Chilton, J. C. (2019). Constructing Correctly in Wood: New Insights into Timber Technology Approaches Through Purist and Liberalist Schools of Thought: Innovative Techniques of Representation in Architectural Design. In *Lecture Notes in Civil Engineering* (o. 871–894). https://doi.org/10.1007/978-3-030-03676-8_35
- [3] Weinand, Y. (2016). *Advanced Timber Structures: Architectural Designs and Digital Dimensioning*. USA, Birkhäuser.
- [4] Weinand, Y. (2021). *Design of Integrally-Attached Timber Plate Structures*, 1st edition, London, Routledge.
- [5] Hantos, Z. (2013). *Szerkesztő feladatok ácsoknak*, Építőipari Ágazati Párbeszéd Bizottság, Budapest.





Homogén gömbpakolásokról

TALATA ISTVÁN

IMRE EMŐKE

GODA TIBOR

LEAK JAMES

Homogén gömbpakolásokról

^{1,2}Talata István, ² Imre Emőke, ²Goda Tibor, ³Leak James

¹Budapesti Gazdasági Egyetem, Külkereskedelmi Kar,
email: talata.istvan@uni-bge.hu

²Óbudai Egyetem, Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Mérnöki Kar

³Edinburgh Napier Univ., School of Engineering and the Built Environment, Edinburgh, UK

Absztrakt

A cikkben a legsűrűbb – legritkább pakolási problémával foglalkozunk. Filep Lajos 1937-ben megjelentetett egy publikációt "Egyenlő gömbökből álló halmazok" címmel a Vízügyi Közleményekben. Ebben számos olyan stabil és homogén gömbpakolás sűrűségét számítja ki, amelyekkel egyforma méretű részecskékből álló szemcsés anyagok szerkezetét modellezhetjük. A célja az volt, hogy megtalálja a legritkább gömbpakolást az ilyen tulajdonságúak közül. A felsorolása nem teljes, de tartalmazhatja az üledékes szemcsés anyagoknak a természetben előforduló legkisebb sűrűségű konfigurációját. Azt, hogy ezt igazoljuk, további vizsgálatok szükségesek.

Kulcsszavak: gömbpakolás, érintési gráf, sűrűségkorlát

On Homogeneous Sphere Packings

^{1,2}István Talata, ²Emőke Imre, ²Tibor Goda, ³James Leak

¹Budapest Business University, Faculty of International Management and Business,
email: talata.istvan@uni-bge.hu

²Óbuda University, Bánki Donát Faculty of Mechanical and Safety Engineering

³Edinburgh Napier Univ., School of Engineering and the Built Environment, Edinburgh, UK

Abstract

The paper addresses the densest – loosest packing problem. The paper presents the content of a publication written by Lajos Filep on „Sets of equal spheres” (Publications in Hydrology) in 1937 [1]. He calculated the densities of some stable and homogeneous sphere packings that may model the structure of granular materials of equal particles. His aim was to find the loosest sphere packing with such properties. His list is not complete but his list may contain the loosest configurations of sedimentated grain materials of equal spherical particles which may occur in nature. To check this, further investigations are needed.

Keywords: sphere packing, contact graph, density bound

1. The work of Filep related to the densest – loosest packing problem of equal spheres

As far as the theoretical approach, we know very few about the relation of the densest – loosest packing of the grains. The densest state is available for equal spheres only. Hales (2006 [2]) proved that the maximum density of packing of equal diameter spheres is $\pi/\sqrt{18} \approx 0.7404 \dots$, so the void volume has density at least $1 - \pi/\sqrt{18} \approx 0.2595 \dots$. It can be easily seen that there is a packing of equal spheres with arbitrary small density whose union is a connected subset of the 3-dimensional space, and then the density of the void volume can be arbitrarily close to 1.

There is a paper written by Lajos Filep on „Sets of equal spheres” (Publications in Hydrology) in 1937 [1]. He introduced the term „uniform sphere packing” for such sphere packings where the packing is connected, stable and the configurations of touching spheres (neighbours) at every sphere are congruent in the packing. He tried to determine the possible uniform sphere packings when the neighbours of a sphere lie in at most 3 consecutive parallel layers (a layer is a subpacking in which the sphere centers lie in a horizontal plane, and it is assumed that the layers are congruent copies of each other in a uniform sphere packing), and the layers form uniform packings. He listed the found extremal configurations of such uniform sphere packings (that is, where the density is maximal or minimal for a given combinatorial structure of touching spheres). His work was intuitive, so there was no proof of the completeness of his list of uniform sphere packings in any sense. It turns out that these packings are homogeneous, that is, for any two spheres in the packing, there is a congruency for which the image of one of those spheres is the other sphere, and the packing is mapped to itself, and furthermore, the image of any layer is a layer again in the packing.

Filep’s goal was also to determine the extremal densities of the listed sphere packings which may occur in nature. To do that, he explored the literature and considered his experience to figure out some additional properties of sphere packings which model stable sedimentated grain materials. Comparing those properties to his listed extremal sphere packings, he found the densest and loosest packings among them, in general, and in different circumstances, corresponding to stable grain materials. He found that if the void volume is larger than about 66%, then there are possibly some adhesion type contact forces between the grains. If the void volume is less than about 26%, then this can be attributed to the different particle size exclusively (Filep, 1937 [1]).

It turns out that Filep’s list is not complete, since some uniform circle packings from [5] are not listed in Figure 1 (see in Section 4), and there might be other missing configurations as well. However, the loosest configuration he found might be the loosest of all possible configurations – to check this, further investigations are needed.

2. Properties of stable granular materials determined by Filep

Filep was an engineer with a good mathematics education background. He tried to model the properties of sand and gravel. Let's take a look how he translated the properties of grain materials of equal particle size to sphere packings, and what assumptions he made about their properties in [1]. He assumed that every particle of a material is a sphere. The particles are equal spheres forming a packing. Their shapes are not changed, and no force plays role among them. He assumed that the grain material is constricted, no movement of particles are possible in the packing without moving all other particles. In geometric terms, it means that the packing is stable, that is, there is no subset of spheres in the packing which can be moved to a different position in a way that the packing remains a packing during the whole process. These assumptions on the geometry of the sphere packing imply the following properties:

Property 1. Any sphere in the packing has no open semisphere without point of contact with other sphere in the packing.

Property 2. The sphere packing is connected.

Property 3. The minimum number of neighbours is 4 for a sphere in the packing.

Property 4. The maximum number of neighbours is 12 for a sphere in the packing.

We note that Property 1 is equivalent with the property that the sphere center lies in the interior of the convex hull of the points of contact of the sphere, for any sphere in the packing. Property 2 is also a consequence of the stability requirement. Property 3 is a consequence of Property 1. Property 4 is known about sphere packings, as the result of the 13 spheres problem, a polemy between Newton and Gregory, rigorously settled by Schütte and van der Waerden only in 1953 [4].

3. Assumptions made by Filep to simplify the densest – loosest packing problem

Filep assumed homogeneity of the considered sphere packings, which ensures that the packing looks like the same locally:

Assumption 1. The packing is uniform, that is, the arrangement of neighbours of a sphere in the packing is the same for each sphere, up to congruency.

Filep's presumption was that grain particles are settling in layers, and the previously settled particles are already constricted, so the new particles stay in layers which are congruent to each other and they form uniform packings, because the packing of the grain particles should appear to be similar at every particle. Therefore, he introduced the notion of layers and there aforementioned properties in the sphere packings.

Assumption 2. The packing consists of horizontal layers, that is, the sphere centers lie in horizontal planes, parallel to each other. Furthermore, the layers form uniform sphere packings which are congruent to each other

It was his belief that the parallel layers are dense enough and therefore far enough from each other, namely the plane containing the sphere centers of a layer cannot have a common point with a sphere from a consecutive layer. This implies the following:

Assumption 3. All neighbours are in at most three layers for every sphere: in its layer (called middle layer), and in consecutive layers (in a layer above, and in a layer below).

From connectedness (Property 2) follows the following:

Property 5. There is a neighbour towards a consecutive layer for every sphere in the packing, in both directions.

From the stability of sphere packing (Property 1), we have the following special case:

Property 6. There are two opposite neighbours towards the two consecutive layers in the packing only if there are at least 3 neighbours in the same layer as the sphere (in the middle layer).

4. Description of the configurations determined by Filep

Filep determined a list of 42 sphere packings fulfilling the above-mentioned assumptions and properties, and having extremal (maximal or minimal) densities. Those are constructed based on 11 distinct layers of sphere packings (that is, sphere packings in which the sphere centers lie in a plane), and the sphere packing is formed by parallel layers that are congruent to the given layer (using translations and sometimes rotations as well). Consecutive layers in such a packing can be placed in several ways in both directions to get all parallel layers, and by several ways we mean that we may use different kind of translations to position consecutive layers. This way we get different arrangements of neighbours of a sphere. If the vertical positioning of two consecutive layers are given, then the horizontal distance between those layers are determined since we push together the two layers as close as possible until some sphere of a layer touch a sphere from the other layer.

The sphere packing in a layer can be represented as a circle packing by intersecting the spheres of the layer by the plane of the sphere centers of the layer. A basic polygon can be drawn in such a plane whose congruent copies tile the plane and those copies are situated the same way as the circle packing of the plane, that is, for any two copies of basic polygons in the tiling of the plane there is a movement of the plane to itself which brings the circle packing to itself, the tiling of basic polygons to itself and one of the two basic polygons to the other. Filep calculated the density of his constructed sphere packings by the following formula:

$$\delta(\mathcal{P}) = \frac{4r^3\pi}{3} \cdot \frac{2n}{A(m_1 + m_2)}$$

In the formula, the first factor is the volume of a sphere of radius r , m_1 and m_2 are the distances of the lower and upper layers from the middle layer (that is, the distances of the parallel planes of the sphere centers between the middle layer and a consecutive layer in both directions), A is the area of the basic polygon and n is the average number of circles corresponding to a polygon (that is, how many circles we need to choose that when we make copies of the basic polygons to tile the plane (using translations and rotations) then all circles of the circle packing can be produced with the same transformations (translations and rotations) and every circle should be obtained only once. The complementer density of the sphere packing is just $1 - \delta(\mathcal{P})$.

Filep listed the 11 basic polygons he found and the corresponding subcases for each basic polygons, from subcase 1.1 to 11.4, having the total of 42 sphere packings. For each subcase, A , n , m_1 , m_2 were determined, then $\delta(\mathcal{P})$ and $1 - \delta(\mathcal{P})$ were calculated. The lowest complemter density is attained in subcase 1.6 (25.95%), and the highest complemter density is attained in subcase 8.1 (71.81%).

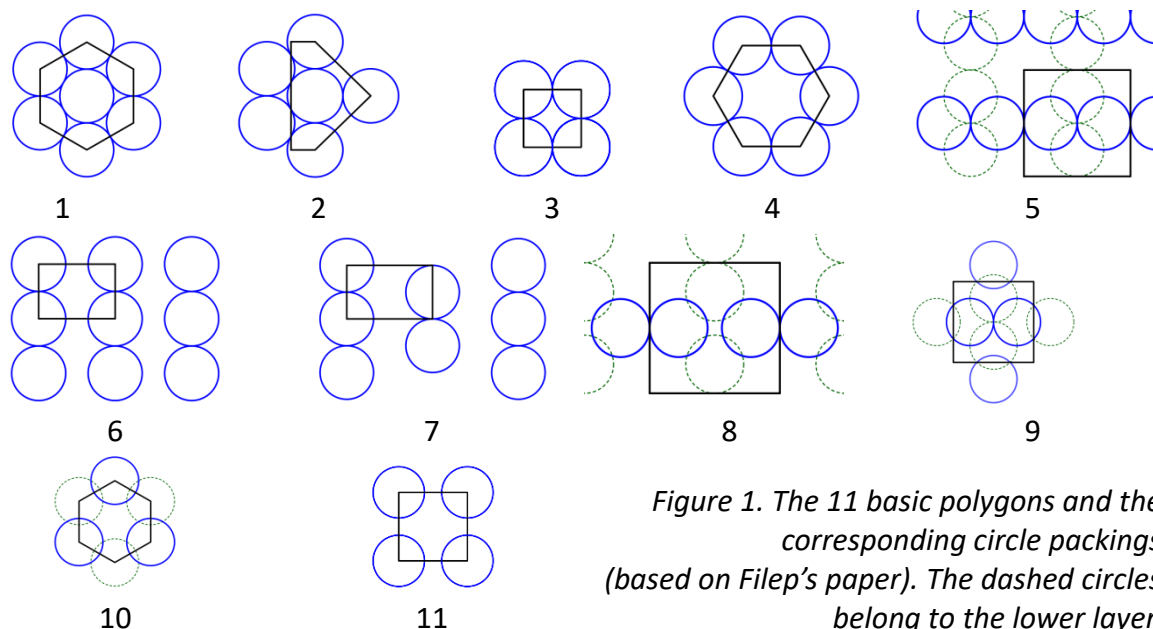


Figure 1. The 11 basic polygons and the corresponding circle packings (based on Filep's paper). The dashed circles belong to the lower layer.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												

Table 1. The 42 packings as subcases showing vertical arrangements of sphere centers of three consecutive layers (based on Filep's paper, O: upper layer, +: middle layer, ●: lower layer).

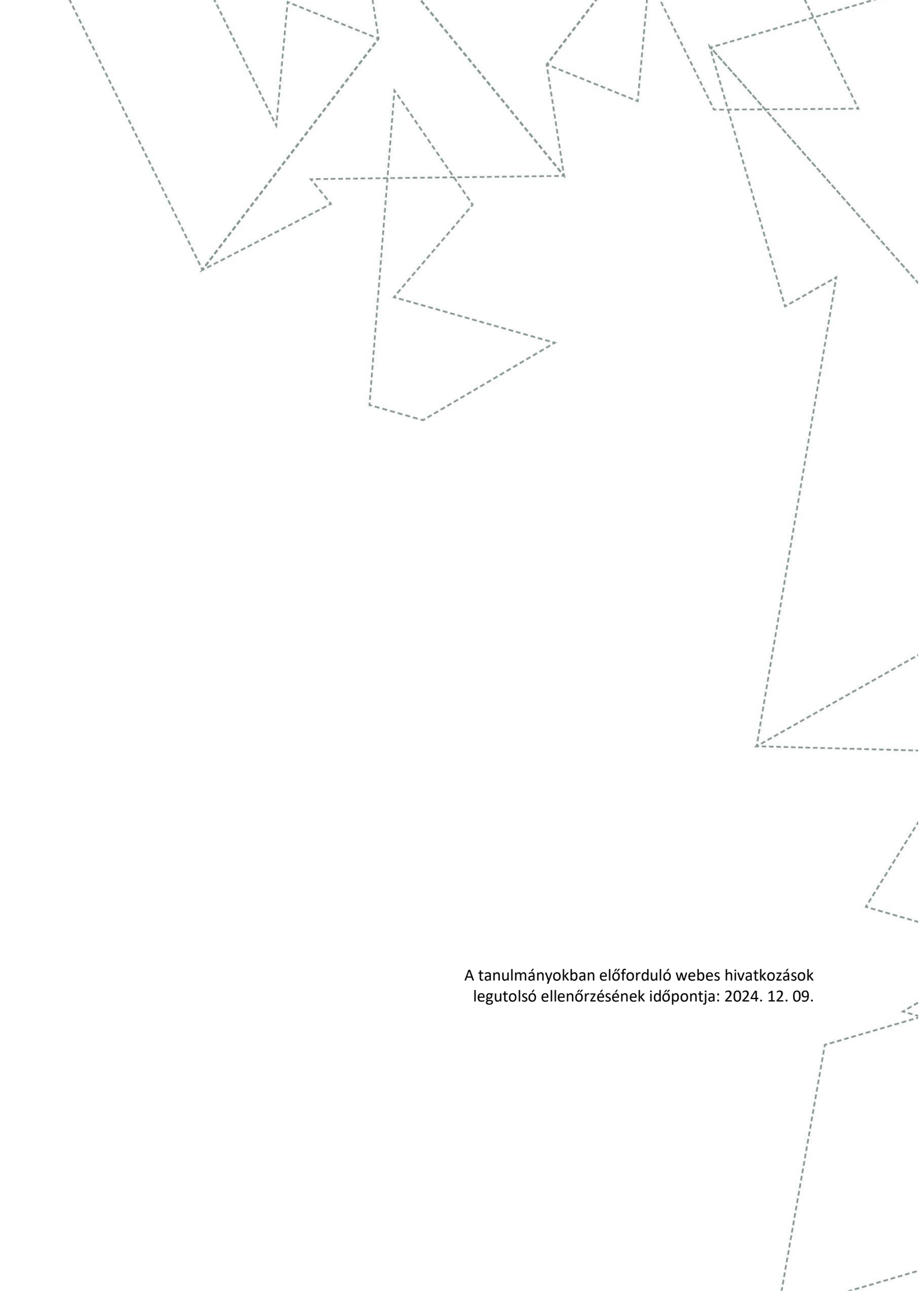
5. Further properties of stable granular material by Filep, and conclusion of the densest – loosest packing problem by Filep

By further considerations of properties of stable sedimentated grain material, the high complementer density subcases 8.1 (71.81%) and 5.1 (69.33%) were rejected, and the highest complementer density in subcase 11.1 (65.99%) was accepted as possible sphere packing corresponding to constricted grain material.

Since Filep's list is not complete, as we mentioned it in Section 1, further investigations are needed to discover the complete list of combinatorial structures and extremal configurations (with respect to density) of possible sphere packings corresponding to stable sedimentated grain material. Filep's conclusion may be valid in the general case as well, so the loosest sphere packing among these might have complementer density 65.99%, but it is needed to be checked. We note that the sphere packing producing this density coincides with the diamond cubic structure well-known in cristallograpy.

References

- [1] Filep, L. (1937). *Set of equal diameter spheres*. Hidrológiai Közlöny, Vol. XIX. No. 1: 128-145.
- [2] Hales, Th. C. (and Ferguson, S.) (2006). *The Kepler conjecture*. *Discrete Comput. Geom.*, Special issue, Vol. 36 No. 1: 5-267.
- [3] Imre, E.; Lorincz, J.; Trang, P. Q.; Csonka, I.; Kaczvinszki-Szabó, V.; Telekes, G.; Goudarzy, M.; Rahemi, N.; Baille, W.; Schanz, T., et al. (2019). *Preliminary study on the relationship between dry density of sands and the grading entropy parameters*, In: Haraldur, S.; Sigurdur, E.; Bjarni, B. (eds.), XVIIth European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Reykjavík, Iceland, 1–6 of Sept. 2019, Geotechnical Engineering, foundation of the future: Conference proceedings, Reykjavík, Iceland, Icelandic Geotechnical Society (IGS): 996-1002.
- [4] K. Schütte, B. L. van der Waerden, (1953). *Das Problem der dreizehn Kugeln*, Math. Ann. 125, 325-334.
- [5] Circle packing, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Circle_packing



A tanulmányokban előforduló webes hivatkozások
legutolsó ellenőrzésének időpontja: 2024. 12. 09.