DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
XII. kötet, 2024 13–23

doi:10.20312/dim.2024.02

Apollóniusz-feladatok és körláncok GeoGebrával[1]

Újvári Dániel*
Selye János Egyetem, Gazdaságtudományi és Informatikai Kar, Matematika Tanszék
ujvaridani97@gmail.com, 0009-0006-8498-1759

Németh László
Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet
nemeth.laszlo@uni-sopron.hu, 0000-0001-9062-9280

ÖSSZEFOGLALÓ. Röviden bemutatjuk a síkbeli körre vonatkozó inverziót, majd példákat adunk ennek alkalmazására, az Apollóniusz-féle feladatok, az arbelosz és a Papposz-körláncok szerkesztésére. A szerkesztések újszerűsége abban rejlik, hogy az összes feladat egységesen, nagyon részletesen, a szerkesztési lépések pontos nyomonkövethetőségével, mindenki számára elérhetően van elvégezve. E tanulmány az első szerző Tudományos Diákköri Konferenciára készült dolgozatán alapszik.

ABSTRACT. We briefly introduce the inversion on the plane circle and then give examples of its application to the problems of Apollonius, the construction of arbelos, and the chains of Pappus. The novelty of the edits lies in the fact that the whole exercise is carried out in a unified way, in great detail, with precise tracing of the editing steps, in a way that is accessible to all. This article is based on the first author's paper submitted to the Scientific Students' Associations.

1. Bevezetés

A geometria az emberiség egyik legrégebbi tudományterülete, Eukleidész *Elemek* [2] című könyvének alapja is a geometria volt. Ez a könyv foglalja össze a geometria alapvető fogalmait és axiómarendszerét, amelyet euklideszi geometriaként ismerünk. Az euklideszi elemek által meghatározott geometriai rendszer rendkívül fontos volt az ókori és a középkori matematikában, és ma is széles körben tanítják a geometria alapjaként. Azonban, ahogy az idők során fejlődött a matematika, a geometria egyre kisebb szerepet kapott. Napjainkban a közoktatásban már nagyon kevés óraszámban oktatják, és azt is kevés szerkesztéssel.

A dolgozatunkban azt mutatjuk meg, hogy viszonylag nehéz feladatok akár egyszerűen is megszerkeszthetőek. A szerkesztések során nem hagyományos körzőt, vonalzót használunk, hanem a GeoGebra szerkesztőprogramot, mint segédeszközt. Ennek az ingyenes programnak a segítségével mindenki könnyedén kipróbálhatja és felfedezheti a geometriai szerkesztéseket. Nem állítjuk, hogy ez kiváltja a hagyományos szerkesztést, de ennek a szoftvernek a segítségével gyorsan, egyszerűen, és látványosan be lehet mutatni szerkesztéseket. Számos példát

[1] ENGLISH TITLE. Apollonius' problems and circular chains with GeoGebra.
KULCSSZAVAK. Inverzió, Apollóniusz-feladatok, arbelosz, Papposz-körláncok.
KEYWORDS. Inversion, Apollonius' problem, arbelos, Pappus chain.
* Levelező szerző (corresponding author).

láthattunk a GeoGebra hasznosságára nemcsak a közép-, de a felsőoktatás kapcsán is, például Talata [6–8] munkáiban.

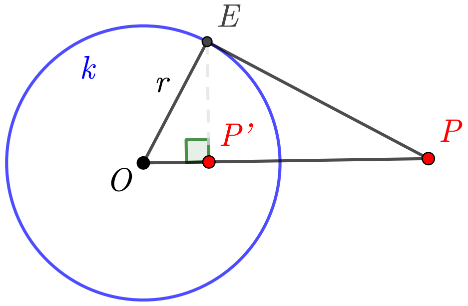
Dolgozatunkban egy jól ismert síkbeli transzformáción, az inverzión (körre vonatkozó tükrözés) keresztül adunk példákat a GeoGebra használatára. Nem célunk mélyrehatóan bemutatni az inverziót, (ami [3]-ben megtalálható) hanem az úgynevezett Apollóniusz-feladatkör néhány alapfeladatára és ezek speciális, látványos általánosításaira, az arbeloszra és a Papposz-körláncokra, adunk szerkesztéseket. A GeoGebra segítségével egységesen elkészített Apollóniusz-féle alapfeladatok megoldása online a https://www.geogebra.org/u/ujvaridani97 weblapon elérhető. Az alkalmazások nemcsak bemutatják az összes lehetséges megoldását, hanem azok szerkesztését egységes szemléletben kezeli. A feladatok teljeskörű elkészítésének gondolata a Selye János Egyetem (SJE) harmadéves matematika tanár szakos hallgatók Geometria 3 kurzuson merült fel. E dolgozat alapjául az első szerző nyertes egyetemi TDK dolgozata [10] szolgál. Megemlítjük, hogy Sipos [5] az Apollóniusz-feladatok középiskolai vonatkozásiról is írt.

Meggyőződésünk, hogy a feladatok minden geometria iránt érdeklő és geometriát tanuló számára hasznos. Célunk még, hogy ha a középiskolában a diákoknak az inverzió nem is tananyag, akkor is a tanítási órákon, vagy szakkörökön a tanárok be tudják mutatni, hogy milyen lehetőségek rejlenek a geometriai szerkesztésekben. Továbbá, hogy felkeltsük a diákok, hallgatók érdeklődését, és arra motiváljuk őket, hogy felfedezzék a geometriai szerkesztések világát, amely sok tudományterületnek elengedhetetlen alapját képezi, mint például a robotika, navigáció, vagy az optikai rendszerek.

2. A síkbeli inverziók

Ebben a fejezetben a síkbeli inverzióról adunk egy rövid összefoglalót, amelynek egy precíz tárgyalása [3]-ban megtalálható.

Legyen adott a síkon egy O középpontú, r sugarú k kör. Legyen P egy körön kívüli pont, amelyből húzzunk érintőt a k körhöz, majd az E érintési pontot vetítsük merőlegesen az OP szakaszra. Így kapjuk a P' pontot (1. ábra), a P inverzét. Most legyen P egy O-tól különböző belső pont. Ekkor P-re alkalmazzuk visszafelé a szerkesztést, azaz az OP félegyenesre állítsunk merőlegest P-ben. Ennek egyik metszéspontja a k körrel legyen E, majd E-ben szerkesszük meg a kör érintőjét és legyen ezen érintő és OP metszete P' pont. Ily módon minden külső ponthoz kölcsönösen egyértelműen egy O-tól különböző belső pontot tudunk rendelni. Minden körponthoz rendeljük önmagát. Ekkor a fenti síkbeli transzformációt körre vonatkozó inverziónak nevezzük.



1. ábra. P pont inverz képe

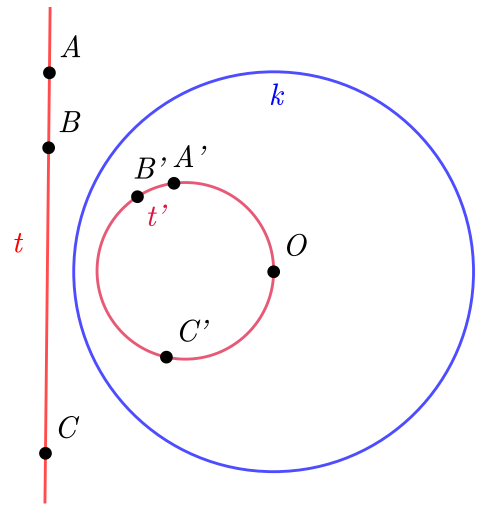
Továbbá esetünkben igaz, hogy az $OP \cdot OP'$ értéke független P ponttól. Az OPE derékszögű háromszögre írjuk fel az OE oldala a befogótételt (lásd [4]) és mivel $OE = r$, kapjuk, hogy

$$OP \cdot OP' = r^2. \tag{1}$$

A későbbiekben szükségünk lesz a sík minden pontjának, így az O pontnak is az inverz képére. Ezért ki kell terjesztenünk az inverziót a sík végtelen távoli elemeivel kibővített projektív síkra. (Minden egyenesnek van egy végtelen távoli pontja; párhuzamos egyeneseknek közös a végtelen távoli pontja; a sík végtelen távoli pontjai egy egyenest, az ún. végtelen távoli egyenest adják. – Szokás a végtelen távoli pontokat és a végtelen távoli egyenest ideális pontoknak és ideális egyenesnek is nevezni.) Ekkor a sík végtelen távoli pontjainak a k körre vett inverz képe az O pont, és fordítva.

Egy alakzat inverz képén az alakzat pontjainak inverz képeinek a halmazát értjük.

A továbbiakban vizsgáljuk meg egy kicsit részletesebben egy egyenes inverzióval vett képét. Legyen adott a síkon egy, az inverzió alapkörének a középpontját nem tartalmazó t egyenes. A t egyenesen vegyük fel az A, B és C pontokat. Határozzuk meg A, B és C inverz képét a k körre nézve. A t egyenes végtelen távoli pontjának inverz képe az O pont lesz. Az alábbi inverz pontok egy körre illeszkednek, tehát t képe egy O-n átmenő kör (lásd a 2. ábrán). A pontos bizonyítás [3]-ban megtalálható. Valójában t' meghatározásához elég lenne a t egyenes O-hoz legközelebbi pontjának a képe is. A GeoGebrával való szerkesztés során nem kell az egyes pontok képeivel foglalkoznunk, mert a programba már be van építve egy parancs, ami a körre vonatkozó inverziót tudja kezelni nemcsak egy pont, hanem bármely alakzatra vonatkoztatva. Ha t tartalmazza az O pontot, akkor $t = t'$, azaz t invariáns az inverzióra nézve.

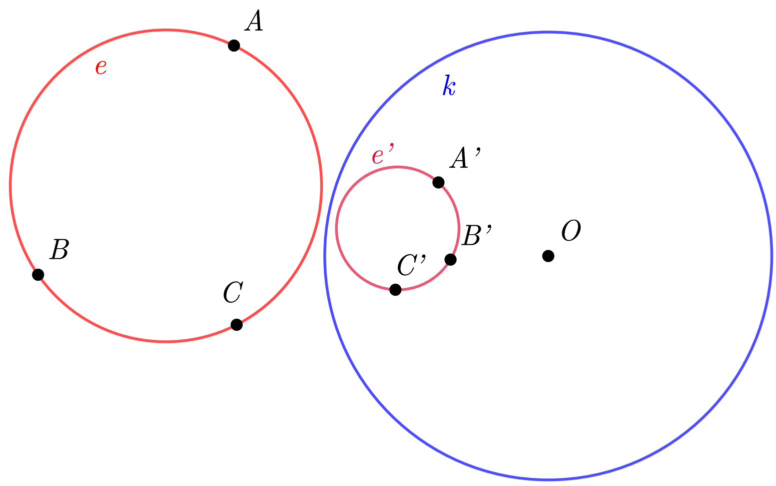


2. ábra. Egyenes inverz képe

Összegezve az egyenes inverziójának eseteit az alábbi állításokat kapjuk.

- Egy egyenes inverz képe mindig áthalad az inverzió O középpontján, és vagy kör, vagy egyenes lesz.
- Ha a t egyenes nem halad át az inverzió O középpontján, akkor t' egy kör.
- Ha a t egyenes tartalmazza az O pontot, t' is egy egyenes, sőt $t = t'$.
- Ahol t metszette, vagy érintette a k kört, ott fogja t' is metszeni, vagy érinteni k-t.

Most vizsgáljuk meg a körök inverz képeit. Legyen adott egy tetszőleges e kör. Az e körön vegyünk fel tetszőlegesen három pontot A, B és C-t (lásd pl. [12]). Határozzuk meg A, B és C inverz képeit a k körre nézve. Az így kapott A', B' és C' pontokra illeszkedő kör az e kör



3. ábra. Kör inverz képe

inverz képe e' (lásd a 3. ábrán). Megjegyezzük, hogy megint a GeoGebra inverzió parancsát használtuk. A pontos bizonyítás [3]-ban megtalálható.

Összegezve a kör inverziójának eseteit az alábbi állításokat kapjuk.

- Egy kör inverz képe kör, vagy egyenes.
- Ha az e kör nem halad át az inverzió O középpontján, akkor e' egy kör.
- Ha az e kör tartalmazza az O pontot, e' egy egyenes.
- Ahol e metszette, vagy érintette a k kört, ott fogja e' is metszeni, vagy érinteni k-t.

2.1. Összegzés

A síkbeli inverzió a középponttól eltekintve kölcsönösen egyértelmű, ponttartó, illeszkedéstartó, szögtartó leképezés, amely az egyeneseket és köröket egyenesbe, vagy körbe viszi át. A végtelen távoli pontok képe az O pont és az O képe bármely végtelen távoli pont lehet. A továbbiakban ezen tulajdonságokat fogjuk felhasználni a szerkesztéseinkben.

3. Apollóniusz-feladatok

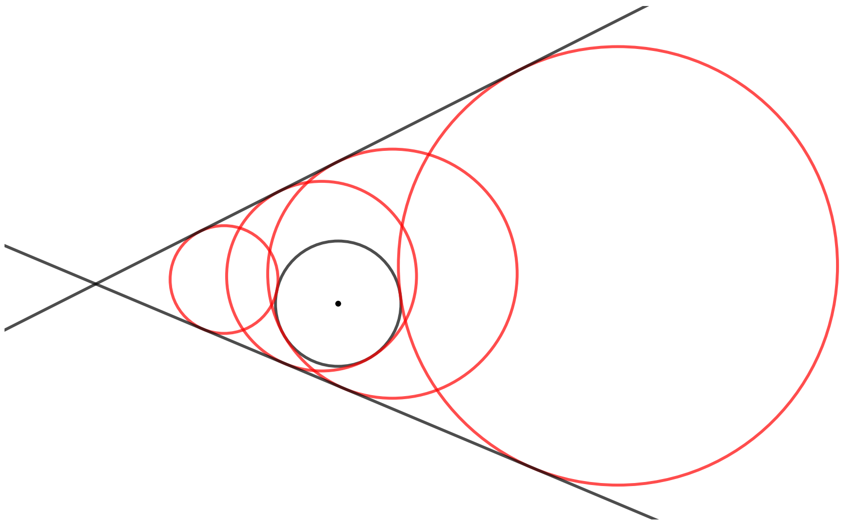
Ebben a fejezetben olyan geometriai feladatokat, problémákat fogunk tárgyalni, amelyek az inverzió ismeretével egyszerűbben megoldhatóak, mint hagyományos euklideszi szerkesztésekkel. Apollóniusz írt két könyvet *Contacts* ($\epsilon\pi\alpha\phi\alpha\iota$ – Epaphaí, Tangencies) címen, amelyben felvetette és meg is oldotta a híres problémáit [1,5]. (Sajnos az eredeti könyv mára elveszett.) A probléma a következő: legyen adott három alakzat, amelyek lehetnek pontok, egyenesek vagy körök. Szerkesszünk olyan kört vagy egyenest, amely érinti az alakzatokat (átmegy a pontokon). Így keletkezett tíz feladat. Az egyszerűbben megoldhatókat az első könyvében írta le, míg az összetettebb megoldást igénylő feladatokkal a második kötetben foglalkozott. Az egyszerűbb esetek: ha például három pontra kell egy kört rajzolnunk, vagy három egyeneshez kell érintő kört szerkesztenünk. Ezek a háromszög köré és bele írható körök esetei. A legösszetettebb feladat az ún. kör, kör, kör feladat, amikor három körhöz keresünk érintő köröket.

A következőkben bemutatunk néhány esetet nem teljes részletességgel, a szerkesztéseket a GeoGebra szoftverrel végeztük el. Az összes eset részletes megoldása [9]-ben tekinthető meg.

3.1. Egyenes, egyenes, kör

Feladat. Adott a síkon két egyenes és egy kör (fekete). Szerkesszünk olyan kört mely érinti az adott elemeket (piros).

Elemzés. Az adott körünket ponttá kicsinyítjük és a kör sugarának nagyságával párhuzamosan eltoljuk az egyeneseket. Ekkor kapunk egy pont, egyenes, egyenes feladatot. Az eredeti (egyenes, egyenes, kör) és a transzformált (pont, egyenes, egyenes) feladat esetében a keresett körök középpontjai megegyeznek, sugaruk pedig a kicsinyítés nagyságával (a kör eredeti és a jelenlegi sugarának különbsége) különböznek [9]. A pont, egyenes, egyenes feladat esetén válasszunk egy tetszőleges inverziót, melynek középpontja a pont. Ekkor a pont képe a végtelenben lesz, a két egyenesből metsző köröket kapunk, és így a két körhöz kell megszerkesztenünk a két érintő egyeneset. Ezen egyenesek inverz képeit kell nagyítani a végső megoldáshoz. Mivel az egyeneseket két irányba tudjuk eltolni, így kétszer két megoldást kapunk általában. Egy általános eset megoldása látható a 4. ábrán. A szerkesztés menete az alábbi linken elérhető: Kör, egyenes, egyenes szerkesztésének menete GeoGebrával [9].



4. ábra. Két egyenest és egy kört érintő körök

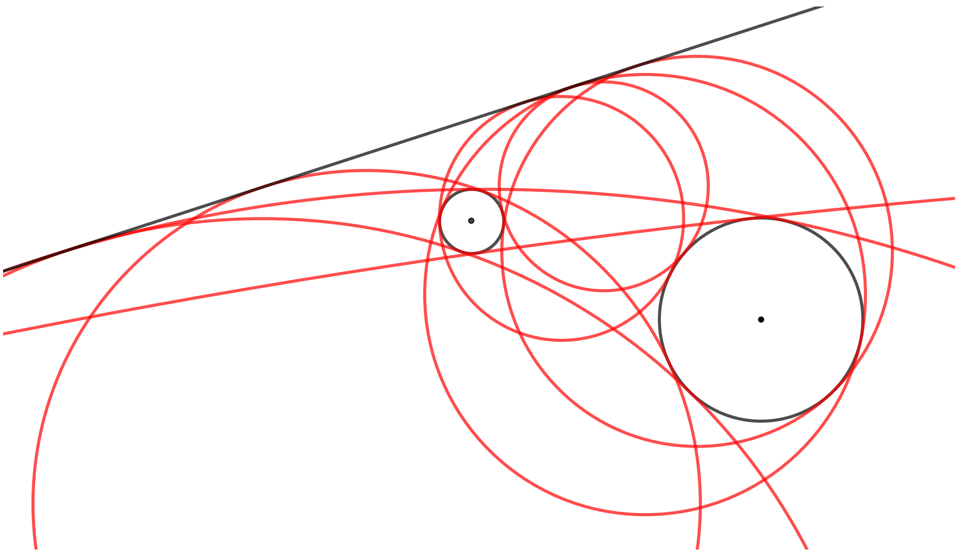
Diszkusszió.

- Ha t és f metszik egymást és p kör nem érinti az egyeneseket, akkor négy megoldás lesz.
- Ha érinti a p kör valamelyik egyenest, akkor három megoldás lesz.
- Ha az egyenesek metszéspontja és a kör középpontja egybeesik, akkor nyolc megoldás lesz.
- Ha f és t párhuzamos és p a két egyenes közötti síkon helyezkedik el, akkor két megoldása van a feladatnak.
- Ha az f és t egyenesek párhuzamosak, és a p kör valamely egyenes túloldalán helyezkedik el, de érinti az egyenest, akkor egy megoldásunk van.
- Ha az f és t egyenesek párhuzamosak, és a p kör valamely egyenes túloldalán helyezkedik el, de nem érinti az egyenest, akkor nincs megoldása a feladatnak.

3.2. Egyenes, kör, kör

Feladat. Adott a síkon egy egyenes és két kör. Szerkesszen olyan kört, amely érinti az egyenest és a két kört.

Elemzés. Kicsinyítsük le mindkét kört annyira, hogy az egyik ponttá zsugorodjon. Ekkor az egyenest is eltoljuk párhuzamosan a kicsinyítés távolságával. Így kapunk egy pont, egyenes, kör Apollóniusz-feladatot. Legyen az inverzió alapköre egy tetszőleges pont körüli kör. Alkalmazva az alakzatokra ezt az inverziót, kapunk egy kör, kör feladatot (a pont képe végtelenben van), azaz a két körhöz kell megszerkeszteni a közös érintőket. Majd ezek inverz képeit nagyítani a végső megoldáshoz. Mivel két irányba is el tudjuk tolni az egyenest, így általában kétszer 4 megoldásunk lesz (5. ábra).



5. ábra. Két kört és egy egyenest érintő körök

Szerkesztés menete. Egyenes, kör, kör szerkesztés menete GeoGebrával [9].

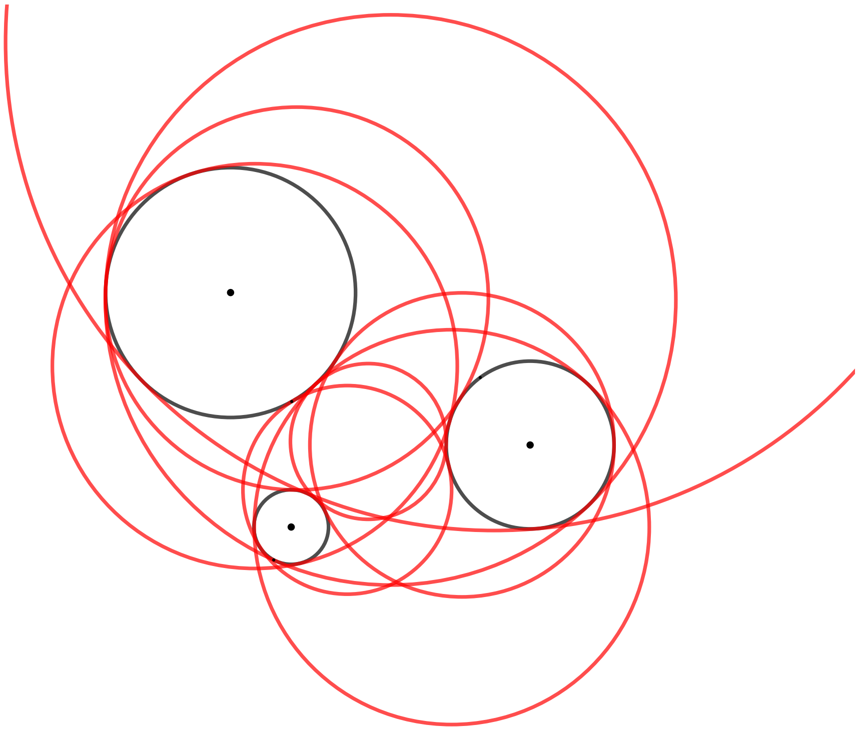
Diszkusszió.

- Ha a két kör nem fedi egymást, és az egyenes azonos oldalán helyezkednek el, akkor nyolc megoldás van.
- Ha az egyik kör érinti vagy metszi az egyenest, és a másik kört nem fedi, de azonos oldalon helyezkednek el, akkor négy megoldás van.
- Ha az egyik kör érinti vagy metszi az egyenest, és a másik kör a metsző körön belül helyezkedik el, akkor két megoldásunk van.
- Ha az egyik kör a másik körön belül helyezkedik el, és nem metszik az egyenest, vagy a két kör az egyenes két különböző oldalán helyezkednek el, akkor nincs megoldásunk.

3.3. Kör, kör, kör

Feladat. Adott a síkon három kör. Szerkesszünk olyan kört, amely érinti a három kört.

Elemzés. Ebben a feladatban csúcsosodnak ki Apollóniusz feladatai. A körök kicsinyítésével a feladatot visszavezetjük a pont, kör, kör feladattá, ezt pedig egy pont körüli inverzióval a két körhöz szerkesztett érintő egyenesek esetére. Vagy ha veszünk egy pontot valamelyik körön és ezt tekintjük az inverzió középpontjának, akkor az egyenes, kör, kör esetre is vissza tudjuk



6. ábra. Három kört érintő körök

vezetni, amit pedig már az előzőekben bemutattunk. Bármelyik megoldási módszert is követjük általánosságban nyolc különböző érintő kört kapunk (6. ábra).

Szerkesztés menete. Kör, kör, kör szerkesztés menete GeoGebrával [9].

Diszkusszió.

- Ha a három kör nem fedi és nem érinti egymást, akkor nyolc megoldás lesz..
- Ha két kör fedi egymást és a harmadik kört nem, akkor nincs megoldás.
- Ha az egyik körön belül helyezkedik el a maradék két kör, akkor négy megoldás lesz.
- Ha a körök érintik egymást, akkor két megoldás lesz.

4. Arbelosz

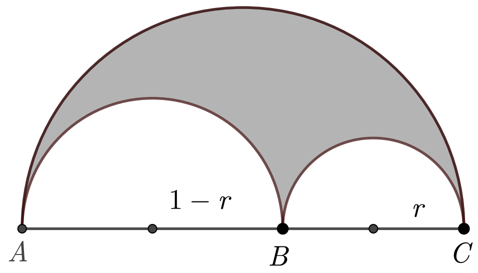
A továbbiakban a körök érintkezésének egy speciális esetét vizsgáljuk meg.

Az „arbelos” kifejezés görögül cipészkést jelent. Ezt a kifejezést a 7. ábra árnyékolt területére használjuk, amely az ókori suszterek által használt kés pengéjére emlékeztet. Arkhimédész volt az első matematikus, aki tanulmányozta ennek az alakzat a matematikai tulajdonságait. Az arbelosz egy olyan sík terület, amelyet három félkör határol, úgy hogy a félkörívek csúcspontjai egy egyenesen vannak, páronként megegyeznek és a félkörök a csúcspontok által meghatározott egyenes ugyanazon félsíkjában vannak.

Az arbelosznak számos érdekes tulajdonsága létezik [11]. Ezek közül kettőt bemutatunk.

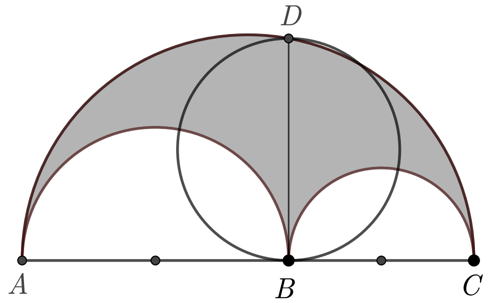
Ívhossz tulajdonság. Az arbelosz ívhossza a bezáró félkör mentén megegyezik a két kisebb félkör mentén mért ívhosszal. Ezt egyszerűen beláthatjuk. Legyen a bezáró félkör sugara 1, az egyik kis félkör sugara r, akkor a másik kis félkör sugara $1-r$ lesz. Így az alsó és a felső ívhosszokra igaz, hogy

$$l = \pi r + \pi(1-r) = \pi.$$



7. ábra. Arbelosz

Terület tulajdonság. Állítsunk merőlegest az átmérőre B pontban, hogy az így kapott egyenes metszéspontja a körívvel legyen D (8. ábra). A BD átmérőjű kör területe megegyezik az arbelosz területével. Az állítás könnyen belátható a megfelelő körök és félkörök területének a kiszámolásával.



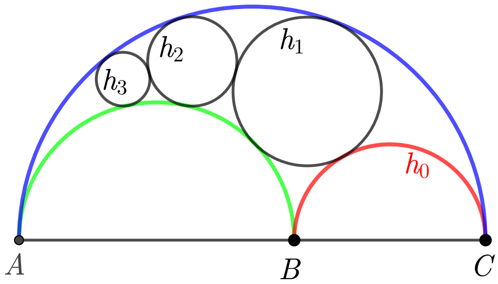
8. ábra. Arbelosz területével megegyező kör

5. Papposz-körláncok

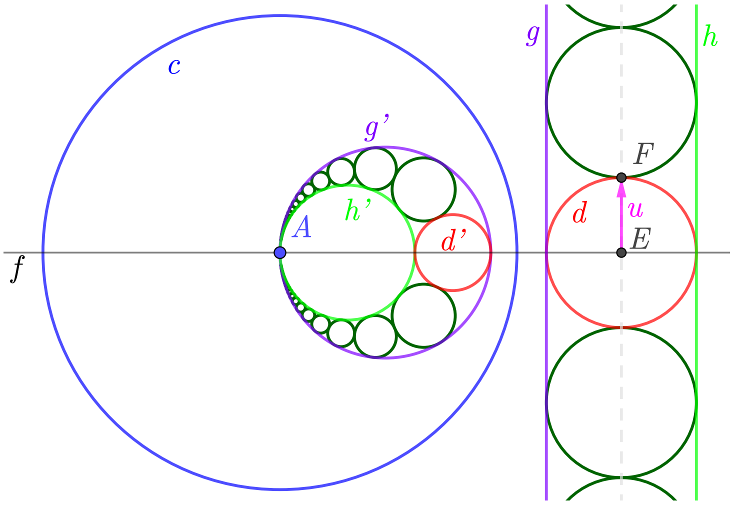
A Papposz-körlánc egy arbeloszon belüli, érintő körök láncolata. Legyen h_0 az arbeloszt alkotó r sugarú félkör, h_1 pedig az a kör amely mindhárom alkotó félkört érint a 9. ábrának megfelelően. A lánc következő köre, a h_2 kör, érinti a h_1 kört és a h_0-tól különböző másik két alkotó félkört. Így folytatva ezen érintő körök definícióját, azaz a h_n kör érinti a h_{n-1} kört a két alkotó félkört, kapjuk meg a körök végtelen sorozatából a Papposz-körláncot (lásd a 9. ábra).

5.1. Papposz-körláncok szerkesztése körre vonatkozó tükrözéssel

Az előzőekben tárgyalt Apollóniusz-feladatokkal meg tudjuk szerkeszteni a körlánc elemeit, mert mindig három körhöz kell érintő kört szerkeszteni. Azonban ez egyesével szerkesztve hosszadalmas megoldás lenne. Amennyiben megvizsgáljuk a 9. ábrát, látható hogy két alkotógörbe érinti az összes körláncban elhelyezkedő kört. Egy harmadik kör pedig mindig érinti az előző, illetve következő kört a láncban. Az inverzió egyik alaptulajdonsága, hogy illeszkedéstartó, ezért elegendő a síkon megszerkesztenünk egy azonos méretű körökből álló érintkező láncot, melyek középpontja egy egyenesen helyezkedik el, valamint a két párhuzamos egyenest, melyek érintik a lánc köreit. Majd ezen konstrukció inverz képe ad egy Papposz-körláncot és tükörképét (lásd 10. ábra és https://www.geogebra.org/m/ycjkbd2v).



9. ábra. Papposz-körlánc



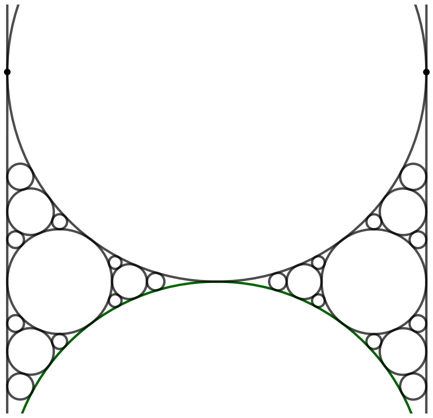
10. ábra

Szerkesztés.

- Vegyünk fel egy tetszőleges A középpontú c kört, mint az inverzió alapköre.
- Vegyünk fel egy tetszőleges E pontot.
- Szerkesszük meg az A és E pontra illeszkedő egyenest $\rightarrow f$.
- Szerkesszünk E középpontú tetszőleges sugarú kört $\rightarrow d$.
- A d kör és f egyenes metszéspontjaiban állítsunk merőlegest f egyenesre $\rightarrow g, h$ egyenesek.
- Szerkesszünk f egyenesre merőlegest E ponton keresztül, majd vegyük az egyik metszéspontját d körrel $\rightarrow F$ pont.
- Legyen $\overrightarrow{EF} = \vec{u}$ vektor.
- Szerkesszük meg a d kör és a g, h egyenesek inverz képét a c-re nézve $\rightarrow d', g', h'$ körök.
- Az E középpontú d kör toljuk el $2\vec{u}$ és $-2\vec{u}$ vektorokkal és vegyük ezek inverz képét. Majd ismételjük az eltolásokat és az inverziót az újabb körlác elemeinek szerkesztéséhez (lásd a 10. ábra).

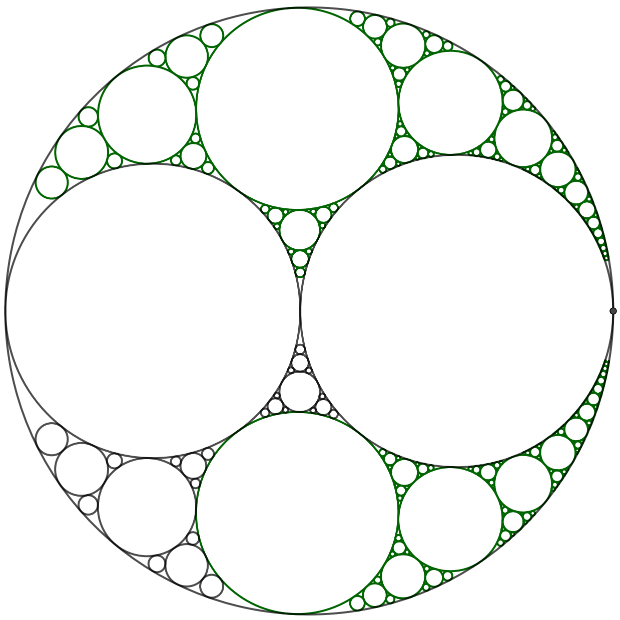
5.2. Körláncok Papposz-körláncban

Továbbgondolva a Papposz-körláncot és az Apollóniusz-feladatokat arra a következtetésre jutottunk hogy össze lehet kombinálni őket. Ebben a fejezetben az idáig megismert appolóniuszi megoldásokat fogjuk használni Papposz-körláncban. Azt mutatjuk meg, hogy egy Papposz-körláncon belül is lehet még végtelen sok körláncot létrehozni. Ha a két párhuzamosunk közé nem csupán egy kört szerkesztünk, hanem többet, akkor további körláncokat kapunk. Úgy készítjük a további köröket, hogy azok is érintő körök legyenek. Elsőként egy olyan kört szerkesztünk, amely érinti a két párhuzamoson belüli kört és az egyik egyenest. Itt alkalmazzuk az egyenes, kör, kör Apollóniusz-feladat megoldását, így kapva meg az érintő kört. Az így létrejött érintő körhöz is szerkesztünk még érintő köröket, amelyből még három Apollóniusz-féle feladat következik. Így bővítve az ábrát végtelen sok körláncot vagyunk képesek definiálni (lásd a 11. ábrán).



11. ábra. Papposz-körláncon belüli érintő körök inverz képe

Vegyük a párhuzamos egyenesek közé megkonstruált érintkező körláncok inverz képét, egy körön belüli érintkező körök sorozatait kapjuk, ahogyan ez a 12. ábrán látszik. A GeoGebrával elkészített szerkesztés pedig a https://www.geogebra.org/m/bdfdjj53 lapon található.



12. ábra. Papposz-körláncon belüli érintő körök

Irodalomjegyzék

[1] **Coxeter, H. S. M.**: *The problem of Apollonius*, The American Mathematical Monthly, **75** (2018), 5–11. doi: 10.2307/2315097.

[2] **Euklidész**: *Elemek*, Gondolat, 1983.
URL https://mek.oszk.hu/06200/06232/pdf/elemek1.pdf

[3] **György, H.**: *Bevezetés a Geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1960.

[4] **Sándor, D., András, H., Géza, K., and László, S.**: *Geometria 11–12. évfolyam*, Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 2024.
URL https://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_iii.pdf

[5] **Sipos, E. R.**: *Apollonius' problems in grammar school*, Theaching Methemetic and Computer Science, **7** (2009), 69–85. doi: 10.5485/TMCS.2009.0205.

[6] **Talata, I.**: *Négydimenziós konvex politóp ábrázolása Geogebrával*, Dimenziók – Matematikai Közlemények, **5** (2017), 11–18. doi: https://doi.org/10.20312/dim.2017.02.

[7] **Talata, I.**: *Közelítő szögharmadolás szerkesztése Geogebrával*, Dimenziók – Matematikai Közlemények, **7** (2019), 9–18. doi: https://doi.org/10.20312/dim.2019.02.

[8] **Talata, I.**: *A Boerdijk-Coxeter tetrahélixről és általánosításairól*, Dimenziók – Matematikai Közlemények, **11** (2024), 3–11. doi: https://doi.org/10.20312/dim.2023.01.

[9] **Újvári, D.**: *Inverziók geogebrával*.
URL https://www.geogebra.org/u/ujvaridani97

[10] **Újvári, D.**: *Pappos körláncok szerkesztése körre vonatkozó tükrözéssel*, Tudományos Diákköri Konferencia, 2024.

[11] **Weisstein, E. W.**: *Arbelos*.
URL https://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html

[12] **Weisstein, E. W.**: *Inversion*.
URL https://mathworld.wolfram.com/Inversion.html