

## Súrlódási együttható meghatározása a gyakorlatban<sup>1</sup>

**Preklet Edina\***

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet  
jooobne.preklet.edina@uni-sopron.hu, ☎ 0009-0000-2922-5375

**Szabó Péter**

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Kreatívipari Intézet  
szabo.peter@uni-sopron.hu, ☎ 0009-0004-1240-2557

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Jelen tanulmányban saját tapasztalatainkat összegző módon vizsgáljuk a súrlódási erő mérésének problémáit, különös tekintettel a súrlódási együttható meghatározására. Bemutatásra kerül az egyes módszerek alkalmazhatósága és innovatív mérési lehetőségek is felvázolásra kerülnek. A tanulmány kitér a mérések során felmerülő kihívásokra és ezekre megoldási stratégiát kínál.

**ABSTRACT.** In this study, we summarize our own experience and examine the problems of measuring the friction force, with particular regard to the determination of the coefficient of friction. The applicability of each method is presented, and innovative measurement options are also outlined. The paper will address the challenges encountered in measurement and offer strategies for their solution.

### 1. Bevezetés

Már az elemző fizikai tanulmányok kezdetén szerepel a súrlódási erő hatásának vizsgálata a testek mozgására. A középiskolai tanulmányok során van lehetőség a súrlódás fizikájának mélyebb megértésére, illetve a téma lehetőséget ad a vektorokkal kapcsolatos műveletek gyakorlására. A megszerzett ismeretek később szükségesek további fizikai jelenségek modellezéséhez. A mérnöki problémák és számítások során felmerülő súrlódási jelenségek megértéséhez és elemzéséhez további részletesség és komplexitás szükséges.

Egy szilárd test felületén csúszó (nem gördülő) szilárd test csúszási súrlódására vonatkozó tapasztalati törvény (Coulomb, 1736-1806) szerint a súrlódásnál fellépő  $F_s$  súrlódási erő iránya a test  $v$  sebességével ellentétes, nagysága pedig közelítőleg független a sebesség és az érintkezési felület nagyságától, és arányos a felületre merőleges nyomóerő nagyságával,  $F_{ny}$ -vel.  $F_s = \mu \cdot F_{ny}$ , ahol a  $\mu$  arányossági tényező a csúszási súrlódás együtthatója [1].

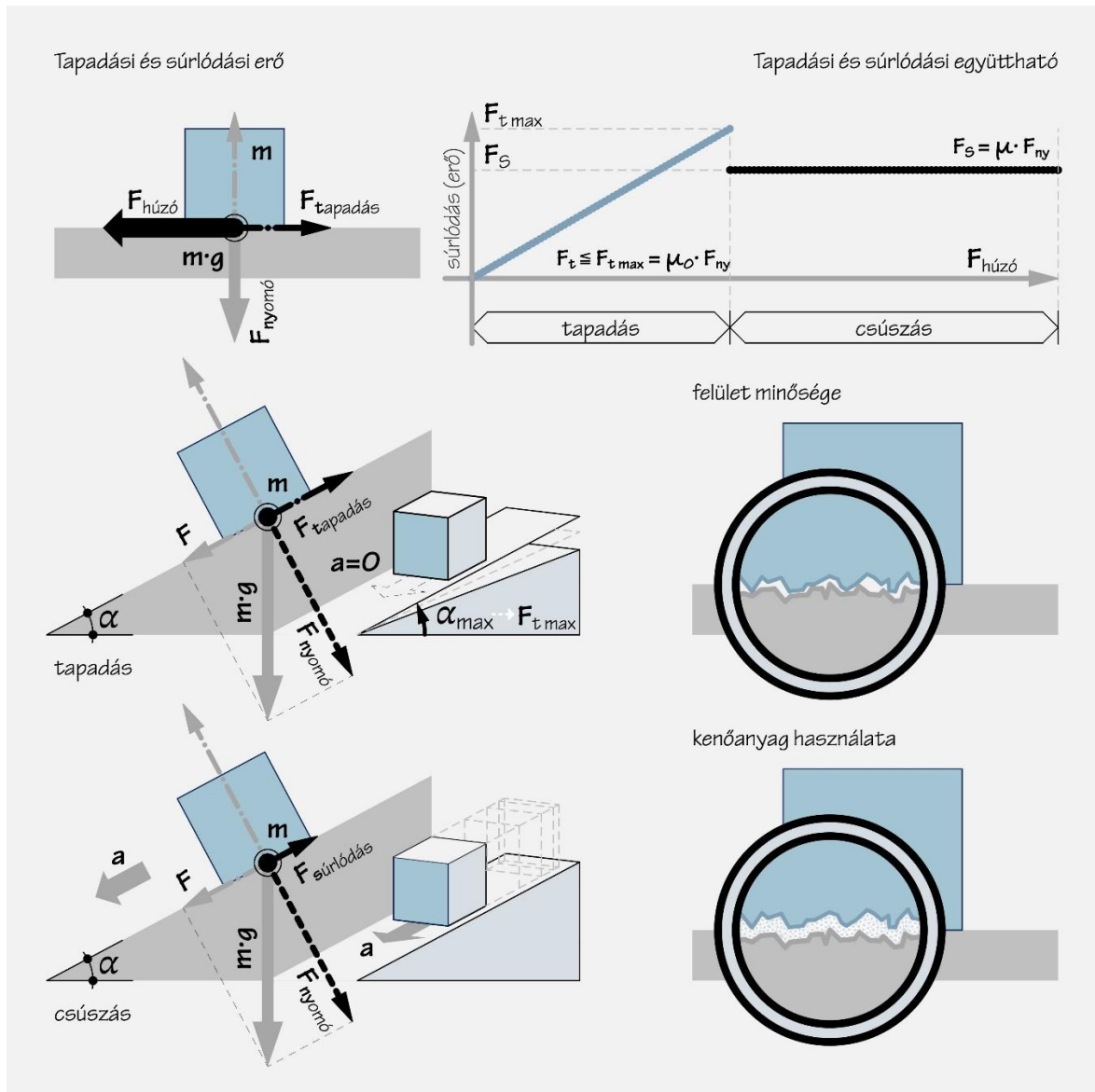
Egymással érintkező felületek közti súrlódási erők vizsgálatakor a tapadási és csúszási súrlódási együttható az 1. ábrán bemutatott módon definiált.  $F$  jelöli a húzóerőt,  $F_t$  a tapadási súrlódási erőt,  $F_s$  a csúszási súrlódási erőt. Az egymáshoz képest nyugvó felületek között ható tapadási súrlódási erő maximális értékének és a felületeket egymáshoz szorító nyomóerő nagyságának a hányadosát tapadási súrlódási tényezőnek vagy együtthatónak nevezzük.

<sup>1</sup> ENGLISH TITLE. Determining the coefficient of friction by experimentation

KULCSSZAVAK. súrlódás, súrlódási együttható, gyorsulásmérő, erőmérő, kamerakép-elemzés.

KEYWORDS. friction, coefficient of friction, accelerometers, force measurement, camera image analysis.

\* Levelező szerző (corresponding author).



1. ábra. A tapadási és csúszási súrlódási együttható értelmezése

Adattárakban [2] található anyag-párokra tapadási és csúszási súrlódási együttható értékeket, ezek az értékek azonban nagyban függenek az anyagok felületi minőségétől. Ilyen fogalmak, mint: sima, csiszolt, fűrészelt felület a gyakorlatban nem értelmezhetők, a hozzájuk csatolt adatok – jó esetben is – csak irányadónak tekinthetők. A felületek minőségét a felületek nedvességtartalma vagy a kenőanyagok használata is olyan mértékben befolyásolja, hogy egy megadott táblázati adattól a mérés jelentősen különböző eredményt produkálhat. Ezért a mérnöki gyakorlatban szükséges az adott felületi minőséget, páratechnikai és hőtechnikai paramétereket figyelembe vevő ellenőrző vizsgálatokat végezni. A súrlódási együttható értéke elméletben nem függ a testek súlyától, a gyakorlatban azonban a nyomóerő drasztikusan tudja változtatni a felületek minőségét és érdességét a deformáció miatt. Így egy könnyű testen végzett kísérlet eredménye csak útmutatónak használható a pár nagyságrenddel nagyobb tömegű tárgyak esetében. Amennyiben pontos adatokkal kell számolnunk, alátámasztó kísérletekre lesz szükségünk.

A gyakorlatban a tapadási súrlódást könnyebb meghatározni, így sokszor csúszási súrlódás esetében is a feladathoz megadott tapadási együttható értékekkel számolunk. Két durva felületet

nehéz egymáson elmozdítani, mert a felületi egyenetlenségek könnyen egymásba tudnak kapaszkodni (1. ábra). Ha csiszolással csökkentjük a felületi egyenetlenségeket, akkor a súrlódási tényezők csökkennek. Azonban, ha a csiszolást tovább folytatjuk, - amit már polírozásnak nevezünk - azaz rendkívül sima felületek érintkezését hozzuk létre, akkor a súrlódási tényezők (különösen a tapadási tényező) meglepően nagy mértékben növekedni kezdenek. Ilyenkor nem a makroszkopikus egyenetlenségek okozzák a súrlódási együtthatók növekedését, hanem mikroszkopikusan egyre több atom kerül közvetlenül egymás mellé, az egymáshoz igen közeli elektronfelhők játékaaként vonzó kölcsönhatás lép fel. Még azt is megfigyelhetjük, hogy a tapadási súrlódás mértéke növekszik, ha az érintkező felületeket előzőleg egyre hosszabb ideig összenyomva tartjuk. Nedves felületek esetében sokszor nem a vékony vízréteg hatása (határréteg súrlódás) jelentkezik, hanem a felületi feszültség is egymáshoz tapasztja a vizsgált anyagokat.

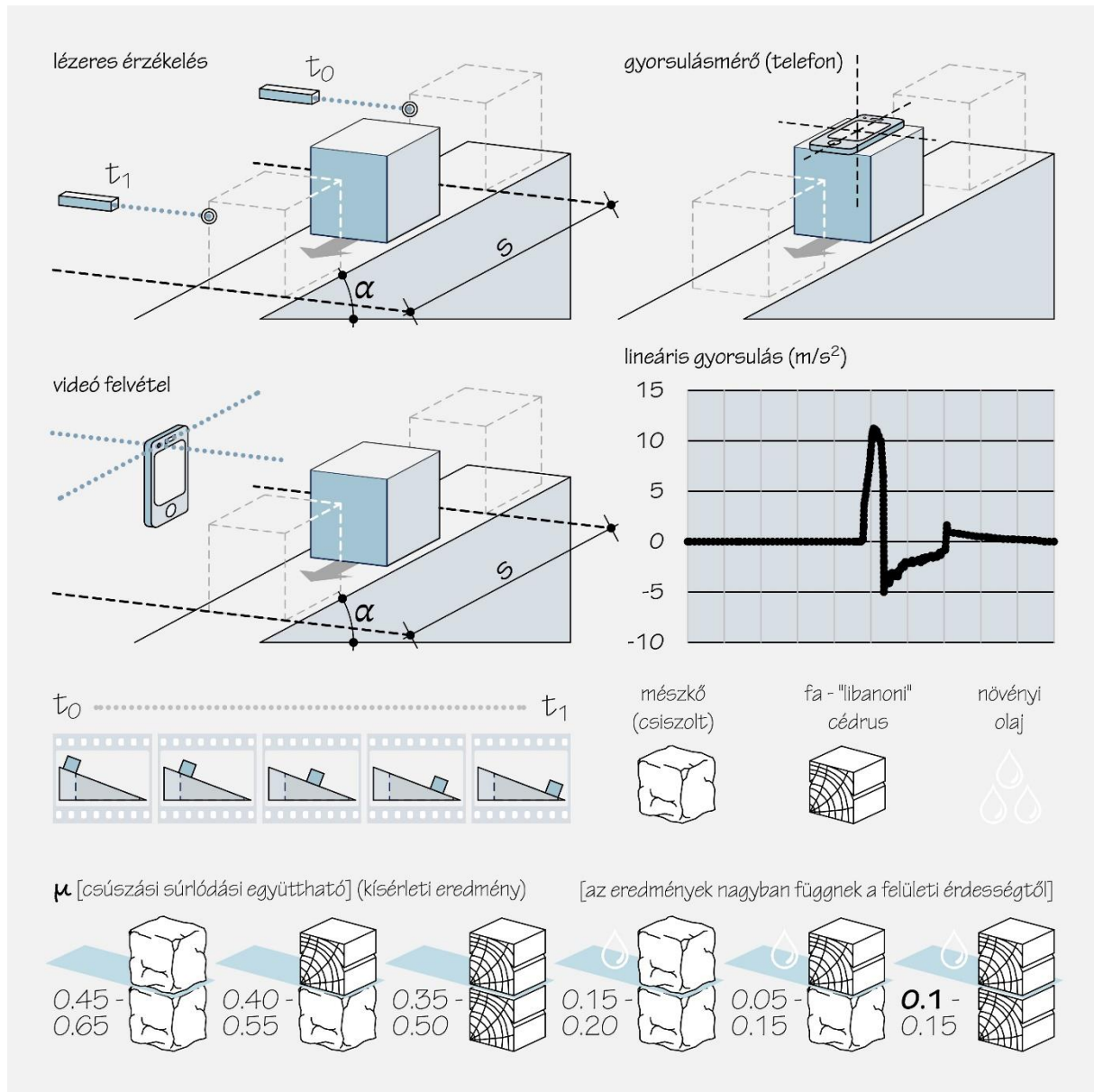
## 2. Mérési módszerek

### 2.1. Általános gondolatok

A súrlódási együttható meghatározásának feladata számunkra egy gyakorlati feltevés igazolása során merült fel. Kísérleteket végeztünk fa és kő közötti súrlódás meghatározására. Faanyagnak a libanoni cédrust, kőnek pedig a mészkövet választottuk. A felületeket fűrészelt és csiszolt kivitelben, száraz, nedves és olajozott felületek között vizsgáltuk. A tapadási együtthatót változtatható szögű lejtőn, a súrlódásit pedig vízszintes felületen, rugós erőmérővel, lejtőn pedig gyorsulás meghatározásával mértük.

### 2.2. Eszközök és módszerek

A „tankönyvi” méréshez rugós erőmérő szükséges. Az elméleti háttér ismeretében közvetett mérést is alkalmazhatunk, azaz a gyorsulásmérést időmérésre vezethetjük vissza. Az időmérés történhet stopperrel, fotokapus alkalmazásokkal, mobiltelefon vagy digitális kamera alkalmazásával, vagy akár gyorsulásmérő szenzorral is (2. ábra). Közvetlenül gyorsulást tudunk meghatározni alkalmas mobiltelefonnal, és a már említett gyorsulásmérő szenzorral is. Amennyiben pedig nincs szükségünk nagy pontosságú súrlódási együttható értékre, tapadási súrlódási együttható meghatározásából is következtethetünk a csúszási súrlódási együtthatóra.



2. ábra. Mérési elrendezések a különböző mérőeszközökkel történő kísérletek esetén

### 2.2.1. Rugós erőmérő

Ha az erőmérővel egyenletesen (azaz a test gyorsulása 0) húzzuk a hasábot, az erőmérő jó közelítéssel egy zérustól különböző, állandó értéket mutat. Mivel a hasábra a húzóerőn kívül a súrlódási erő is hat, a dinamika alapegyenletéből tudjuk, hogy az a csúszási súrlódási erő, ami a húzóerővel ellentétes irányú és azzal egyenlő nagyságú. Így a konkrét mérésnél vízszintes felületre helyezük a mozgatni kívánt testet. Ha a test tömege megengedi, akár rá is akaszthatjuk az erőmérőre és megmérhetjük a műszerről a test súlyát, amivel majd az alátámasztást is nyomni fogja ( $F_{ny}$ ). Ha lassan, egyenletesen növekvő nagyságú erőt fejtünk ki a hasábra, akkor leolvashatjuk azt az értéket, amelynél a hasáb megindul. Ez az érték adja a tapadási erő maximumát, amiből a tapadási súrlódási együttható számolható ( $F_{tap,max.} = \mu_0 F_{ny}$ ). Majd, amikor mozgásba jött a test, azt az erőt kell leolvasnunk, amely a test egyenletes mozgatásához szükséges. Mivel a csúszási súrlódási erő nagysága egyenesen arányos a két felület között ható  $F_{ny}$  nyomóerővel és a felületpár anyagi minőségétől függő arányszámmal ( $\mu$ ) azaz  $F_s = \mu F_{ny}$  - az

előzőhöz hasonlóan – a 2 erő hányadosaként kapjuk a csúszási súrlódási együtthatót. A mérés egyszerűsége lehetővé teszi a két súrlódási együttható relációjának megállapítását is, miszerint  $\mu < \mu_0$ . Rugós erőmérő használata során számolnunk kell a leolvasás pontatlanságával, illetve a pontos „egyenletes mozgás” megvalósítása is emberi tényező függvénye.

A vízszintes felületen végzett méréseket úgy végeztük el, hogy minden próbatest súlyát pontosan 10 N értékre állítottuk be. Ennek megvalósításához a próbatestre edényt rögzítettünk, így vizet beletöltve, annak súlya pontosan beállíthatóvá vált. A rugós erőmérőn így állandó sebesség esetén a súrlódási együttható értékét tudtuk leolvasni. A leolvasást, kiértékelést videofelvétel elemzése is megkönnyítette.

### 2.2.2. Gyorsulás mérés

Növelhető a pontosság, ha a mérés során a gyorsulásmérést időmérésre vezetjük vissza. A mérésnél azzal a feltételezéssel számolunk, hogy a felület egyenletes, így a súrlódási együttható a mozgás során állandó. Az állandó erőhatást úgy biztosítjuk, hogy lejtő felületen ( $\alpha$  a lejtő hajlás-szöge) csúsztatjuk le a testet, így - ha a nehézségi erő hatása alatt álló test lecsúszik a lejtőn - gyorsulása állandónak tekinthető. Ez azt jelenti, hogy a négyzetes úttörvény kezdősebesség nélküli formulája alkalmazható (1), (ahol  $s$  a megtett út,  $t$  a csúszás ideje,  $a$  a gyorsulás):

$$a = \frac{2s}{t^2}, \quad (1)$$

majd a súrlódási együttható számolható (2), (3):

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\mu = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha}. \quad (3)$$

Mérésünk elvégzése előtt meg kell határoznunk azt a szöveget, melynek alkalmazásakor a test már lecsúszik a lejtőn. Ezzel egyben a tapadási súrlódás értékét is meg tudjuk határozni.

### Fotokapu

Az időmérés megvalósulhat hagyományosan stopperrel. Mérésünk ebben az esetben csak demonstrációs, elméleti jellegű lesz, mivel az emberi reakcióidő gyakorlatilag laboratóriumi méreteket használva sem küszöbölhető ki.

Fotokapu alkalmazása kizárja a fenti hibát. Amennyiben rendelkezésünkre áll 2 db fotokapu és időmérő egység, akkor az indítási és érkezési időpillanatok különbségével megoldható az időmérés. Taneszköz boltban vásárolhatunk ilyen egységet. Amennyiben magunk rakjuk össze, megoldható 2 lézersugár-kibocsátó modulból és sugárvevő modulból álló készlettel is. Az okklúziós módszert (lézersugár megszakítását) használja a rendszer, fénysebességgel érzékeli egy tárgy jelenlétét a lézersugárzó és a vevő között. Természetesen a tárgyak nem korlátozódnak ilyenkor fémre, minden olyan tárgy észlelhető, amely blokkolja a fényt. Ezt a rendszert összekapcsolva egy mikroprocesszorral nagy pontosságú mérést valósíthatunk meg. Mai árakkal számolva az összeállításunk költsége fele lesz a készen kapható rendszerének.

### Mobiltelefon

Amennyiben azonban nem állnak a fent felsorolt elektronikai alkatrészek rendelkezésünkre, akár a mobiltelefonnal is kivitelezhető a mérés. A lecsúszás folyamatát egy stabilan elhelyezett mobiltelefonnal videóra rögzítjük (elegendő 60 fps). Majd a kamerakép elemzésével a telefon



képkockasebességének a függvényében adott pontossággal meghatározható a csúszás időtartama.

A legtöbb ma használatos mobiltelefon rendelkezik beépített gyorsulásmérővel, így ha megoldható a telefon próbatestre rögzítése, pillanatnyi gyorsulás értékeket tudunk meghatározni, vagy használhatjuk a gyorsulásmérő szenzort a csúszás időtartamának pontos meghatározására is. Telefonos – ingyenes - alkalmazások közül válogatni tudunk. Az általunk használt alkalmazás a phyphox [3], [4] physical phone experiments volt. A gyorsulásmérési mód kiválasztásánál fontos szempont, hogy olyat válasszunk, ahol van lehetőség a „g nélküli” mérésre, mellyel úgy kapjuk az adatokat a lineáris gyorsulásmérőből, hogy a tényleges gyorsulást kapjuk, gravitációs gyorsulás nélkül. Azaz ez az érzékelő 0-t jelez, amikor a készülék nyugalomban van. A gyorsulásmérő szenzor működési elvéről a következő pontban részletesen beszélünk.

A súrlódási együttható meghatározásánál abból indulunk ki, hogy egy vízszintes felületen meglökött test lassulásához, illetve megállásához szükséges fékezőerőt a súrlódási erő biztosítja (4). A súrlódási együttható meghatározásához tehát csak le kell olvasni az átlagos lassulást ( $a$ ), ami elvileg állandó a fékezés során. Majd ezt elosztva a  $g$  értékével (5), megkaphatjuk a csúszási súrlódási együttható értékét a próbatest és a felület között.

$$m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g \quad (4)$$

$$\mu = \frac{a}{g} \quad (5)$$

Amennyiben gyorsulásmérőnk nem alkalmas „g nélküli” mérésre, akkor vektor és mátrix műveleteket segítségével az adatsorból egy jól meghatározott forgatási mátrix segítségével mi is elő tudjuk állítani a szükséges adatokat.

A telefont rögzíthetjük a mozgó testre, mindössze arra kell ügyelni, hogy pontos méréshez a próbatestet úgy kell meglökni, hogy a telefon  $y$  irányba mozduljon el, így a lassulás iránya és a szenzor iránya egy egyenesbe essék (az alkalmazásban könnyen láthatjuk az irányokat, legtöbb esetben a telefon hossz tengelye adja az  $y$  irányt).

Technikailag az Excelben kimentett adatokból kivágjuk a felfutó gyorsulásértékek utáni negatív adatokat (hiszen innentől lassul a test), majd ezeknek az átlagát képezve kapjuk az átlagos gyorsulás értékét. Példánkban az átlagos gyorsulásérték  $-2,08 \text{ m/s}^2$ , ezt osztva  $g$ -vel, kapjuk a súrlódási együtthatóra a  $0,21$ -es értéket. Ugyanazon a felületen többször is elvégezhetjük a mérést, különböző erőhatásokat kifejtve, különböző távolságokon fékeződő test esetén

### Gyorsulásmérő szenzor

Amennyiben olyan felületet szeretnénk vizsgálni, ahol nem biztosítható a csúszó felületre rögzített telefontal történő mérés, alkalmazhatunk gyorsulásmérő szenzorokat. A gyorsulásmérők olyan elektromechanikus eszközök, amelyek a gyorsulás statikus vagy dinamikus erőit érzékelik. A statikus erők közé tartozik a gravitáció, míg a dinamikus erőkhez tartoznak a rezgések és a mozgások. A gyorsulásmérő szenzorok beszerzése már nem jelent komoly költséget, áruk a rugós erőmérő árával közel megegyező. Találhatunk a piacon olyan burkolattal rendelkező szenzort, melynek kialakítása alkalmassá teszi az eszközt kritikus körülmények közötti - például vízzel locsolt felület - használatra. A mérések kiértékelése intelligens algoritmusokkal történik. Szenzor alkalmazásakor a súrlódási együttható mérése esetén külön kell választanunk 2 esetet. Ha a szenzorunk képes „g nélküli” mérést végezni, akkor gyakorlatilag a korábban leírt mérési folyamat alkalmazható. Többnyire viszont - a gyorsulásmérő szenzorok működési elve miatt - az általunk elérhető szenzor nem biztosítja a „g nélküli” mérés lehetőségét.

Ez annyit jelent, hogy a gyorsulásmérő gyorsulási erőt mér, egy, kettő vagy három síkban. Jelenleg, a leggyakrabban használt gyorsulásmérők a háromtengelyes gyorsulásmérők, amelyeket három különálló gyorsulásmérő rendszeréből alakítanak ki. Ha bármely síkon a gyorsulás az érzékelő irányával ellentétes irányban történik, a gyorsulásmérő negatív értékkel méri a gyorsulást. Ellenkező esetben a gyorsulás pozitív értéként kerül mérésre. Ha nem hat külső gyorsulás a gyorsulásmérőre, akkor a készülék csak a szabad esés standard gyorsulását, azaz a gravitációs erőt méri (majd  $g$  többszöröseként adja meg). Feltételezve, hogy egy 3 tengelyes gyorsulásmérő úgy van elrendezve, hogy az X tengely érzékelője balra mutat, az Y tengely érzékelője lefelé mutat, a Z tengely érzékelője pedig előre, valamint a készülékre nem nehezedik erőhatás, a gyorsulásmérő a következőt mutatja majd:  $X = 0$  g,  $Y = 1$  g,  $Z = 0$  g. Ha ugyanezt a gyorsulásmérőt balra irányítják, a következő értékeket fogja mutatni:  $X = 1$  g,  $Y = 0$  g,  $Z = 0$  g.

A megfelelő szenzor kiválasztásához hasznos lehet a gyorsulásmérők működési elvének tanulmányozása is (MEMS kapacitív gyorsulásmérők, piezoelektromos és piezorezisztív), hiszen ez egy olyan érzékelő, amely a test gyorsulását és rezgését is méri. Így számos eszközben alkalmazzák, laptopokon, mobiltelefonokban, autók műszerfalain, de még a sportolók is használnak ilyet mozgásuk monitorozására.

Amennyiben maradunk az eredeti feladatunknál és súrlódási együttható megállapítására szeretnénk használni, (de nem extrém környezetben) a gyorsulásmérőt, akkor egyszerűbb a helyzetünk, hiszen a mérésünk pontossága nem követeli meg, hogy ügyeljünk például a hőmérsékletet, páratartalom vagy az elektromágneses interferencia mérésünk során jelentkező értékeire a szenzor kiválasztásánál. Jelen tanulmány elkészítéséhez egy WitMotion [5] gyorsulásmérő szenzort használtunk. A kapott értékeket a szenzor saját szoftverével értékelhetjük, majd a gyorsulástartományból megállapíthatjuk a felületen történő mozgás idejét. Megfelelő szoftvert segítségével  $g$  nélküli gyorsulást is számíthatunk. Amennyiben van lehetőségünk ennek használatára, a mérésünkkel nagy pontosságot érhetünk el. Az érzékelő a gyorsulás meghatározásához Kálmán-szűrő algoritmust használ. Ez az eljárás mozgó, változó rendszerek állapotáról ad optimális becslést sorozatos mérésekkel, figyelembe véve az állapotméréseket és a zavaró tényezőket (zajok, bizonytalanságok, pontatlanságok). Két lépésben működik. Az első becslési lépésben a Kálmán-szűrő kiszámolja az aktuális állapotváltozókat, a bizonytalanságokkal együtt. A következő mérés eredményeit súlyozott átlagolással veszi figyelembe. A sorozatos valós idejű mérések során az átlagolás eredményeként egyre jobb értékek adódnak, ahol a zajok és egyéb zavaró tényezők kiesnek. Az algoritmus rekurzív jellegű, csak az aktuális kalkulált állapotot, és az aktuális mérési eredményeket veszi figyelembe, korábban mért adatokat nem használ fel.

### Becslés

Végezetül pedig meg kell említenünk azt, hogy amennyiben a mérésünk nem igényel különösebb pontosságot, a legegyszerűbb módon becsléssel határozhatjuk meg a csúszási súrlódási együttható értékét. Felhasználjuk, hogy a tapadási súrlódási együttható mindig nagyobb, mint a csúszási súrlódási együttható. Szükséges továbbá, hogy a 2 érintkező felület ne csak vízszintesen, hanem lejtőként is kezelhető legyen, így egyszerű méréssel meghatározhatjuk a tapadási súrlódási együtthatót. Tudjuk, hogy ha a lejtőre helyezett test nyugalomban van, akkor gyorsulása zérus, és a lejtő rá tapadási súrlódási erőt fejt ki. A megcsúszást megelőző határhelyzetben a tapadási súrlódási erő értéke maximális. Erre az esetre felírjuk a mozgásegyenletet (6), majd rendezés után a (8) egyenlőtlenséget kapjuk.

$$0 = ma = mg \sin \alpha - \mu_0 mg \cos \alpha, \quad (6)$$

$$\mu_0 \cos \alpha = \sin \alpha, \quad (7)$$

$$\mu_0 \leq \tan \alpha. \quad (8)$$

Tehát a felületet megdöntjük, rá helyezzük a csúsztatni kívánt testet. Megkeressük a lejtőnek azt a helyzetét, ahol a hasáb még éppen nem indul el a lejtőn. Ha nincs kéznél szögmérő, egyszerű mobiltelefonos alkalmazással megmérhetjük a lejtő szögét, de természetesen a lejtő magasságának és vízszintes vetületének a leméréséből tangens függvényel számíthatjuk. Felhasználva a korábban említett, mérhető megállapítást, miszerint  $\mu < \mu_0$ , a kapott tapadási súrlódási együttható értékéből becslést adhatunk a csúszási súrlódási együtthatóra is.

### 3. Összefoglalás

Kísérleteink során megállapítottuk, hogy bár a számolási feladatokban a súrlódási együttható leggyakrabban számértékkel adott [2], mégis mindig szem előtt kell tartanunk elméleti ismereteinket és gyakorlati tapasztalatainkat, miszerint a súrlódási együttható értékét egy rövid folyamat során is számtalan tényező befolyásolja, térben és időben egyaránt. Meghatározására a feladattól függően vannak pontosabb és kevésbé pontos módszerek, egyszerűbb és bonyolultabb megoldások. A mérések kivitelezése nemcsak laboratóriumi eszközökkel, és laboratóriumban történhet. A rendelkezésre álló eszközök elérhetőségének köre jelentősen megváltozott az utóbbi években, hiszen manapság a mobiltelefonunkba épített gyorsulásmérőt is használhatjuk, azaz gyorsulásmérő szenzorral rendelkezünk, míg rugós erőmérővel kevésbé.

### Irodalomjegyzék

- [1] **Budó, Á.**, Mechanika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1994., 55-65.
- [2] **Szalay, B.**, Fizika, Műszaki tankönyvkiadó Budapest, 1979. 101-112.
- [3] **Staacks, S., Dorsel, D., Hütz, S., Stallmach F., Splith T., Heinke T., Stampfer, C.**, Collaborative smartphone experiments for large audiences with phyphox June 2022 European Journal of Physics 43(5) doi: [10.1088/1361-6404/ac7830](https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac7830)
- [4] phyphox / RWTH Aachen University. phyphox wiki, 2021.
- [5] wit-motion / WitMotion Shenzhen Co.,Ltd, 2024.