DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
XII. kötet, 2024 105–109

doi:10.20312/dim.2024.11

Matematika a politechnikában és az építészetben[1]

Andor Krisztián
Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Kreatívipari Intézet
andor.krisztian@uni-sopron.hu, 0009-0008-5693-1169

ÖSSZEFOGLALÓ. Az ókori világtól az újkorig sok fejfájást okozott a nagy terek lefedése minél kevesebb oszlop felhasználásával. A kupolaszerkezetek megjelenése azzal a kompromisszummal járt, hogy a szerkezetben fellépő normáligénybevételek csak negatív értékűek lehettek, azaz csak nyomás felvételére voltak alkalmasak, így felfelé nagy „ívet" kellett kanyarítaniuk az építőmestereknek, megakadályozva a további hasznos szintek alkalmazását. Bernoulli-Navier párosról elnevezett hipotézis segítségével (a hajlított gerenda keresztmetszetei síkok maradnak) lehetővé váltak a pozitív normálerők kellő pontosságú szintű meghatározása. A rugalmas szál differenciálegyenletének meghatározásával megnyílt az út az építészetben a többszintes épületek tervezhetősége előtt.

ABSTRACT. From the ancient world to the modern era, covering large spaces using as few columns as possible caused many headaches. The appearance of the dome structures came with the compromise that the normal demand incomes occurring in the structure could only have a negative value, i.e. they were only suitable for absorbing pressure, so the builders had to make a big "curve" upwards, preventing the use of additional useful stories. With the help of a hypothesis named after the Bernoulli-Navier pair (the cross-sections of the bent beam remain flat), it became possible to determine the positive normal forces with sufficient accuracy. By defining the differential equation of the elastic line, the way was opened in architecture for the design of multi-story buildings.

1. Bevezetés

A nagy csarnokokat az ókorban oszlopcsarnokokkal (ld. egyiptomi, görög kultúra) tudták csak megoldani (az őskorban barlang volt a fedett lakóhely). Az újkor hajnalán született meg az igény ennek kiváltására. Ekkor kezdtek el foglalkozni rácsos szerkezetekkel és gerendákkal. Nagyon sok kutató, matematikus próbálta ezt az építészeti igény mind jobban modellezni több-kevesebb sikerrel, néha egymástól külön. Galilei mellett mások is megfigyelték a konzoltartó felső és alsó öveinek eltérő viselkedését (1. ábra). Azonban az eltérő anyagstruktúrákban elvesztek az általános következtetések levonásához.

Végül a természettudományban a matematikai módszerek felhasználása nyitotta meg az utat, mint az számos más felfedezés esetén is megtörtént. A hajlított gerenda differenciálegyenlete vezetett el végül egy általános és egyszerű képlethez, melyet aztán már nem csak az elméleti fejtegetésben, hanem más politechnikai tudományokban is tudtak alkalmazni. Így a rugalmas szál közelítő differenciálegyenlete elindulhatott hódító útjára, mely során választ adhattak a kutatók és tervezők számos olyan kérdésre, melyek addig blokkolták a mérnöki modellezést.

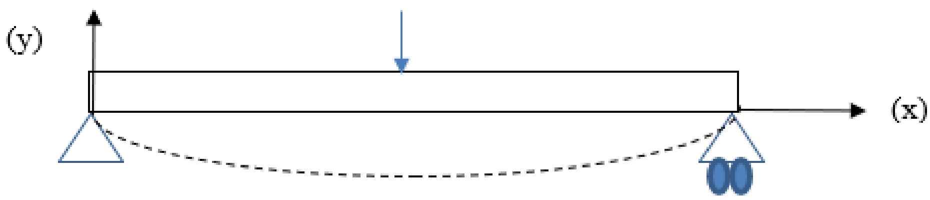
ENGLISH TITLE: Mathematics in polytechnics and architecture
KULCSSZAVAK: Rugalmas szál, hipotézis, görbület
KEYWORDS. Elastic line, hypothesis, curvature

1. ábra. Galilei rajza a konzoltartóról

2. Matematikai egyenletek, tételek

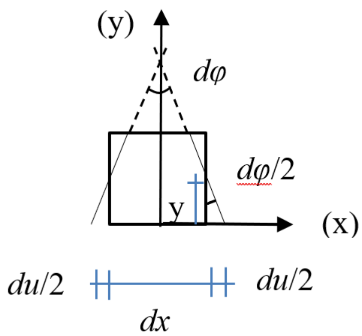
A mechanikában tanított és tanult gerendaelmélet a hajlított tartó vizsgákatával kezdődik.

Első körben a hajlított gerenda (2. ábra) geometriai megfigyelése történik, azaz geometriai egyenletek felírására kerül sor.



2. ábra. Hajlítással terhelt gerenda

Kiragadva egy közbenső (dx) vastagságú keresztmetszetet, kicsit felnagyítsuk azt fel és az alábbi geometria rajzolható fel.



3. ábra. Hajlított gerenda közbenső keresztmetszete a megváltozott szélső síkokkal

Azzal a feltételezéssel élve, hogy a meghajlított gerenda megváltozott keresztmetszeti szélső oldalai az egyszerűsítés kedvéért nem görbülnek meg, hanem síkok maradnak (Bernoulli-Navier hipotézis), felírható az alábbi egyszerű trigonometriai megfigyelés (3. ábra alapján):

$$tg\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{y}.$$

Mivel tartószerkezetekről van szó, melyektől elvárás a kicsiny alakváltozás, így kis x értékekre tg(x) közelíthető x-szel, 2-vel egyszerűsítve az alábbi képlet kapjuk.

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}u}{y}. \tag{1}$$

A relatív alakváltozás felírható az alábbi formában:

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Az egyenlet rendezhető *du*-ra és így a (1) egyenlet alakja

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\varepsilon_x \mathrm{d}x}{y}.$$

Az egyenletet rendezni lehet $\mathcal{E}_x$-re, ekkor

$$y\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \varepsilon_x$$

következik. A $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}$ kifejezés felismerhető, hogy nem más, mint a tartó κ_x görbülete az adott keresztmetszetben és a geometriai egyenlet végkövetkeztetése

$$y\kappa_x = \varepsilon_x. \tag{2}$$

A geometriai egyenlet után az anyagegyenlet felhasználásával, lineáris anyagmodellt feltételezve a következő egyenletet eredményezi (Hooke törvénye):

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \tag{3}$$

ahol

σ_x: az x irányú (tartó tengelyével egyező irányú) normálfeszültség (fajlagos erő),
E : a tartó anyagának rugalmassági modulusza,
ε_x: a korábban is ismertetett relatív alakváltozás normál irányban (x).

Mivel a geometriai végegyenletben ε_x szerepel, érdemes az egyenletet erre rendezni, így

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}.$$

A mechanikában végül az egyensúlyi egyenletek felírásával folytatható a modellezés menete, mely az egyensúlyt feltételezi, vagyis, hogy a szerkezet statikus állapotban van; az aktív és passzív erők egyensúlyban vannak, illetve, ha láthatóvá tesszük a belső erőket (képzeletben elvágjuk a tartót), akkor a külső és belső erők is kiegyenlítik egymást.

Az egyensúlyi egyenletek közül elsőként a vízszintes (x irányú) erők összegzését végezzük el egy képzeletben elvágott tartón, láthatóvá téve az elvágott keresztmetszetben a belső fajlagos erőket (x irányú feszültségeket) [1].

$$\sum F_x = 0 = \int_A \sigma_x \mathrm{d}A$$

A fenti egyenletben átható, hogy az nem tartalmaz erőket, mivel a tartón csak y irányú terhelésből (aktív erő) csak függőleges (y irányú) reakcióerők (passzív erők) ébredhetnek. Így az összegzés a láthatóvá tett fajlagos erőkre szorítkozik; a keresztmetszetben fellépő húzó- és nyomóerőknek, melyek a fajlagos erők (σ_x) integrálásával egyezik, egyensúlyban kell lenniük. Az egyenlet folytatható a (3**)** egyenlet behelyettesítésével, azaz

$$\sum F_x = 0 = \int_A \sigma_x \mathrm{d}A = \int_A E\,\varepsilon_x \mathrm{d}A.$$

Felhasználva a (2) egyenletben kapott képletet, a

$$0 = \int_A E\,y\kappa_x \mathrm{d}A$$

összefüggés adódik. A fenti egyenletben a konstansok kiemelhetők az integráljel elé, így

$$0 = E\kappa_x \int_A y\mathrm{d}A.$$

Triviális megoldáson túli megoldást keresve az integrál 0-val való egyezését kell vizsgálni, hiszen egy hajlított tartó görbülete (κ_x) nem nullák, ahogy az anyagának merevsége sem (E). Felismerhető, hogy az integrál nem más, mint a keresztmetszet elsőrendű nyomatéka, mely akkor nulla, ha a súlyponti tengelyre van felvéve azt. Ebből levonható az a következtetés, miszerint a keresztmetszetben fellépő húzó és nyomófeszültségek a keresztmetszet súlypontjában nulla. Így a következő egyensúlyi egyenletet (nyomatéki egyenlet) a keresztmetszet súlypontjára kell majd felírni. Nyomatékot (M_z) okoznak a tartó tengelyére (x) merőleges erők egy adott keresztmetszet (z) tengelyére (hajlítás tengelye), valamint a nem elhanyagolható magasságú tartó keresztmetszetében ébredő belső erők a keresztmetszet ugyancsak (z) irányú súlyponti tengelyére. Tehát

$$\sum M_z = 0 = M_z + \int_A \sigma_x y\mathrm{d}A.$$

Ismét felhasználva a (2) és (3) egyenletek képleteit, behelyettesítéssel az

$$\sum M_z = 0 = \int_A E\,\varepsilon_x \mathrm{y}\mathrm{d}A = \int_A E\,y\kappa_x \mathrm{y}\mathrm{d}A$$

egyenletet kapjuk. Kiemelve az integráljel elé a konstansokat, átrendezve a –Mz-t a túloldalra ismét egy érdekes mechanikai kifejezést látható az integráljel után:

$$-M_z = E\kappa_x \int_A y^2\,\mathrm{d}A.$$

Itt is felismerhető, hogy az integrál jelen esetben a keresztmetszet másodrendű nyomatéka, amit idegen szóval inerciának nevezünk és ez esetben I_z-vel jelölhetünk. Az egyenlet szépen rendezhető az alábbi szerint.

$$-M_z = E\kappa_x I_z. \tag{4}$$

A **(4)** egyenlet κ_x-re rendezve a hajlítónyomaték és a hajlítómerevség hányadosa, mely a mérnöki számítások egyik alappillére lesz rajzolódik ki, vagyis a görbület egyenesen arányos a hajlítónyomatékkal (M_z)és fordítva arányos a hajlítómerevséggel (EI_z).

$$\kappa_x = -\frac{M_z}{EI_z} \tag{5}$$

A görbület matematikai összefüggése a

$$\kappa_x = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$$

képlettel írható fel.

Mérnöki megfontolásból kijelenthető ugyancsak a tartószerkezetektől elvárható kis alakváltozásra hajlamosság mentén, hogy terhelés hatására a lehajlás (y) kis értékű legyen (l/250). Nem nehéz belátni, amennyiben egy tartó nem hajlik le nagyon, akkor a lehajlás x-mentén történő megváltozása (y') is csekély lesz. A képletben a lehajlásváltozás négyzetre van emelve, így annak értéke még csekélyebb lesz; szinte nulla, így kijelenthető, hogy

$$\kappa_x \approx y''.$$

A **(5)** egyenletbe helyettesítve eljutunk a hőn keresett rugalmas szál közelítő differenciálegyenletéhez. Tehát

$$y'' \approx -\frac{M_z}{EI_z}.$$

A továbbiakban lehet bizonyítani a hajlított tartóban ébredő feszültségek számítására alkalmazott képletet, mely azonban túlmutat jelen előadás keretén.

3. Összefoglaló

A rugalmas szál közelítő differenciálegyenlete mérnöki szempontból kellő pontossággal modellezi a hajlított tartót. Minden más műszaki tudományban a hajlított gerenda modellezéséhez ezt a képletet alkalmazzák, így a Zimmermann-Eisemann féle levezetésben a vasúti pályák terhelésének modellezésénél is.

Jelen tanulmány is bizonyítja, hogy a műszaki felsőoktatásban a matematika emelt szintű ismerete nélkülözhetetlen. Bizonyítja azt is, hogy a matematika a gyakorlatban nagyon segíti a mechanika fejlődését, mely a mérnöki gondolkodás alappilére.

Köszönetnyilvánítás

Itt szeretném megköszönni Németh László és Szalay László kollégáim segítségét, kitartását a nehéz időkben, a tudomány átmentését. A kézirat bírálójának külön szeretném kifejezni a köszönetemet a cikk alapos átolvasása és hasznos tanácsai miatt.

Irodalomjegyzék

[1] **Kaliszky, S., Kurutzné, K.M.**, Mechanika II., Szilárdságtan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2000), 49–502.