Matematikai Közlemények
III. kötet, 2015

doi:10.20312/dim.2015.08

Matematika a fizikában

Nagy Zsolt
Roth Gyula Erdészeti, Faipari Szakközépiskola és Kollégium
nagyzs@emk.nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A cikkben az optikai, mechanikai és elektromosságtani példákon keresztül mutatom be az elemi, illetve magasabb matematikai módszereket, amelyeket használhatunk a fizikai problémák megoldásában.

ABSTRACT. In this paper, I present elementary and higher mathematical methods through optical, mechanical and electricity exercises that can be efficiently used for solving physical problems.

Néhány problémán keresztül szeretném bemutatni, hogy milyen matematikai eszközöket használhatunk a fizika oktatása során. Természetesen a válogatás önkényes, vannak kimaradó módszerek (elsősorban itt a vektor műveletekre gondolok), és vannak olyanok is, amelyekhez magasabb matematikai ismeretekre van szükség. Ez utóbbiakat természetesen csak az emelt szintű matematikát tanuló diákoknak lehet megmutatni.

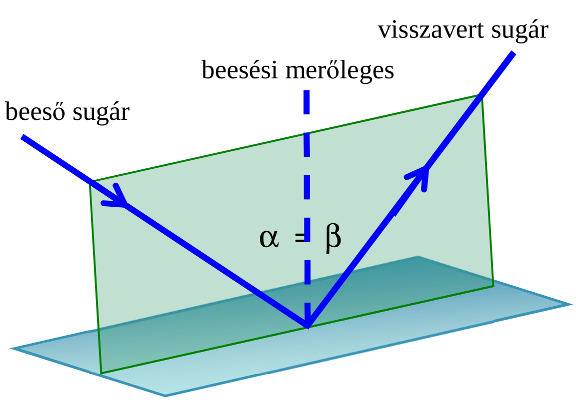
1. probléma: Fényterjedés

Felhasználva a legkisebb idő **Fermat elvét**: A fény a legrövidebb idejű pályán mozog. Ennek három következményét vizsgálhatjuk, amelyek közül az első kettő triviális, ezért csak a harmadikat vizsgáljuk meg részletesebben:

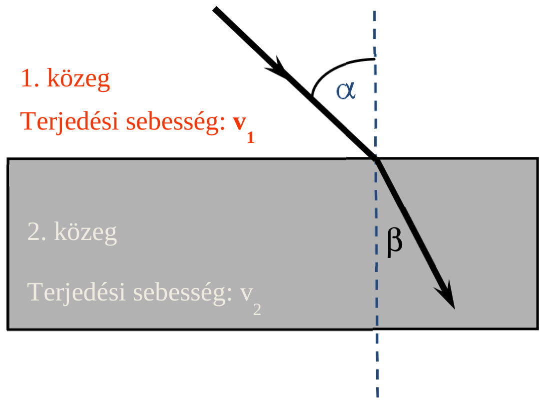
1.1. következmény: A fény a homogén közegben egyenes vonalban terjed, azaz $t = \frac{s}{c}$ minimális, ha $\boldsymbol{s}$ is minimális ($\boldsymbol{c}$=állandó).

1. ábra

1.2. következmény: A fényvisszaverődés törvénye: beesési szög = visszaverődési szög (2. ábra).



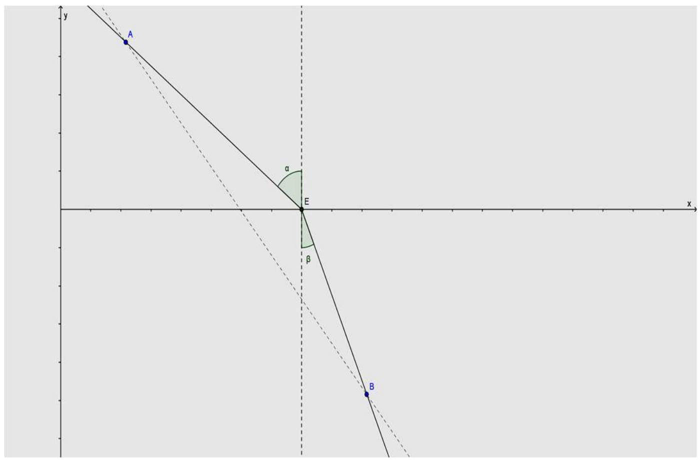
2. ábra



3. ábra

<u>1.3. következmény</u>: Snellius-Descartes törvény, fénytörés: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{2,1}$ (3. ábra).

Helyezzük el az ábrát egy koordináta rendszerbe (4. ábra).



1. ábra

A fény a határfelületen levő E pontban törik meg.
A pontok koordinátái legyenek a következők: $A(a;b)\ B(c;d)\ E(x;0)$.

Mivel a terjedés ideje: $t = \frac{AE}{v_1} + \frac{EB}{v_2}$.

A pontok koordinátáit felhasználva: $t(x) = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}}{v_2}$.

A terjedési idő szélsőértékét az x szerinti első deriváltból tudjuk meghatározni:

$$t'(x) = \frac{2(x-a)}{2v_1\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} + \frac{-2(c-x)}{2v_2\sqrt{(c-x)^2 + d^2}} = 0.$$

Az ábra alapján: $\sin\alpha = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}}$ *és* $\sin\beta = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}}$.

Így az idő derivált függvénye a következőképpen alakul:

$$t'(x)=\frac{\sin\alpha}{v_1}-\frac{\sin\beta}{v_2}=0\,.$$

Ezt átrendezve kapjuk a keresett összefüggést:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}=n_{2,1}\,.$$

2. probléma: Váltakozó feszültség effektív értéke

Igazoljuk, hogy a szinuszosan váltakozó feszültség esetén: $U_{eff}=\frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$!

Megjegyzés: A váltakozófeszültség annak az egyenfeszültségnek az értéke, amely ugyanazon az ellenálláson adott idő alatt ugyanannyi munkát végez, mint az adott váltakozó feszültség.

A váltakozó feszültség a következő függvénnyel adható meg: $U(t)=U_{\max}\cdot\sin(\omega\cdot t)$.

A váltakozó feszültség *Δt* időtartam alatt végzett munkája: $\Delta W=\frac{U^2}{R}\cdot\Delta t$.

A teljes periódus idő alatt végzett munka ezen elemi munkák 0-tól T-ig vett összege, azaz integrálja:

$$W=\int_0^T\frac{U^2}{R}dt=\frac{1}{R}\cdot\int_0^T U_{\max}^2\sin^2(\omega\cdot t)\,dt=\frac{U_{\max}^2}{R}\int_0^T\sin^2(\omega\cdot t)\,dt \qquad (1)$$

Felhasználva, hogy: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.

Kapjuk a következőt:

$$W=\frac{U_{\max}^2}{R}\int_0^T\frac{1-\cos(2\cdot\omega\cdot t)}{2}dt=\frac{U_{\max}^2}{R}\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(2\cdot\omega\cdot t)}{4\omega}\right]_0^T \qquad (2)$$

Rendezve:

$$W=\frac{U_{\max}^2}{R}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{\sin(2\cdot\omega\cdot T)}{4\omega}\right)=\frac{U_{\max}^2}{R}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{\sin\left(2\frac{2\pi}{T}T\right)}{4\omega}\right)=\frac{U_{\max}^2}{R}\cdot\frac{T}{2} \qquad (3)$$

Mivel az egyenfeszültség munkája *T* idő alatt:

$$W=\frac{U_{eff}^2}{R}T \qquad (4)$$

A két munka egyenlőségéből adódik, hogy:

$$U_{eff}^2=\frac{U_{\max}^2}{2} \qquad (5)$$

Azaz:

$$U_{eff}=\frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \qquad (6)$$

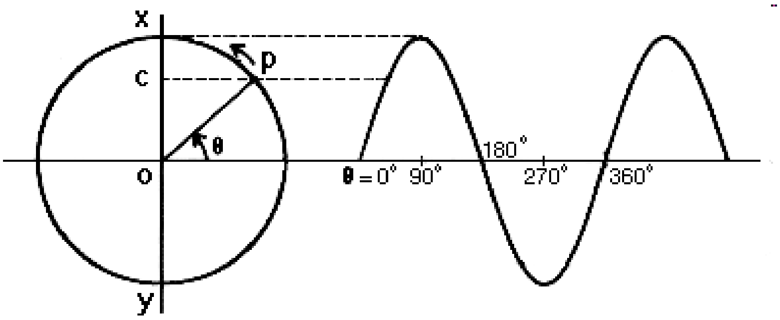
Természetesen a módszer nem csak a szinuszosan váltakozó feszültségre alkalmazható, hanem bármilyen időben periódikusan váltakozó feszültség esetén is. Hasonlóan járhatunk el az áramerősség esetén is.

3. probléma: A harmonikus rezgőmozgás

Minden harmonikus rezgőmozgáshoz tartozik egy úgynevezett referencia körmozgás. A harmonikus rezgőmozgás rezgésszáma (frekvenciája) és a körmozgás fordulatszáma is egyenlő, tehát a rezgés szögsebessége a körmozgás szögsebességével egyenlő. A rezgőmozgás amplitúdója és a körmozgás pályájának sugara is megegyezik.

$$f_{rezgés} = f_{körmozgás} \quad \Big| \cdot 2\pi$$

$$\omega_{rezgés} = \omega_{körmozgás}$$

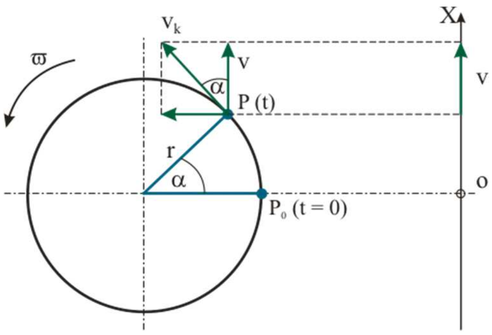


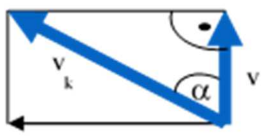
2. ábra

Az előbbiek felhasználásával és az ábrából adódik, hogy a harmonikus rezgőmozgás kitérése:

$$x = A \cdot sin(\omega \cdot t) \qquad (1)$$

Vizsgáljuk meg, hogyan függ a harmonikus rezgőmozgást végző test sebessége az időtől!





3. ábra **7. ábra**

A rezgő test sebessége (az ábrából):

$$cos\,\alpha = \frac{v}{v_k} \quad \Rightarrow \quad v = v_k \cdot cos\,\alpha \qquad (2)$$

Egyenletes körmozgás miatt: $\alpha = \omega \cdot t \longrightarrow v = v_k \cdot cos(\omega \cdot t)$.

A kerületi sebesség és a szögsebesség közötti összefüggés: $v_k = r \cdot \omega$

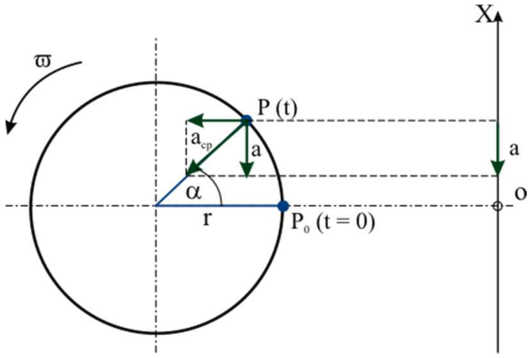
$$v = r \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t) \qquad (3)$$

Mivel $r = A$, ezért a harmonikus rezgőmozgást végző test sebessége:

$$v = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t) \qquad (4)$$

Mivel a rezgőmozgás változó sebességű mozgás, ezért a rezgő test gyorsulása sem nulla!

Vizsgáljuk meg, hogyan függ a harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása az időtől!



4. ábra

a_{cp} – a körpályán mozgó test centripetális gyorsulása

a – a rezgő test gyorsulása (az ***a_{cp}*** ***x*** irányú komponense)

A rezgő test gyorsulása (ábráról):

$$\sin\alpha = \frac{a}{a_{cp}},$$

$$a = -a_{cp} \cdot \sin\alpha .$$

Egyenletes körmozgás miatt: $\alpha = \omega \cdot t$.

Centripetális gyorsulás: $a_{cp} = r \cdot \omega^2$

$$a = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (4)$$

Mivel: $r = A$, a harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása:

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (5)$$

A harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása arányos a kitéréssel, de azzal ellentétes irányú, ezt fejezi ki a negatív előjel.

Közös koordináta-rendszerben ábrázolva a függvényeket (9. ábra).

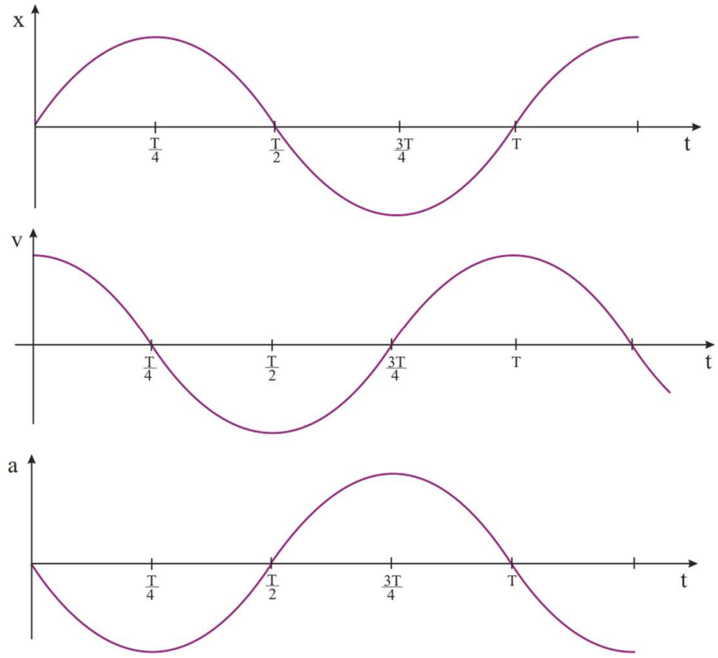
Természetesen az elemi levezetést kiválthatjuk magasabb matematikai ismeretekkel.

Mivel a sebesség a kitérés idő szerinti első deriváltja, a gyorsulás pedig a második, így kapjuk, hogy:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (6)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \left(A \cdot \sin(\omega \cdot t)\right)' = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (7)$$

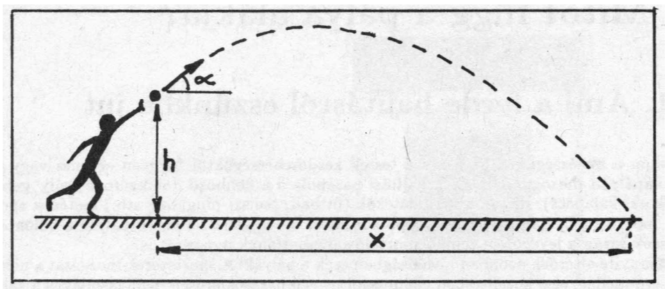
$$a(t) = \ddot{x}(t) = \left(A \cdot \sin(\omega \cdot t)\right)'' = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (8)$$



5. ábra

4. probléma: A súlylökés optimális szöge

Milyen szög alatt kell elhajítanunk h magasságból, adott v_0 kezdősebességgel a súlygolyót, hogy vízszintesen a lehető legnagyobb távolságot érjük el? [1]



6. ábra

Az 10. ábra alapján a ferde hajítás függőleges és vízszintes összetevője:

$$-h = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$

Fejezzük ki az időt a (2) egyenletből és helyettesítsük be (1)-be:

$$\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x^2 - x \cdot \tan\alpha - h = 0 \qquad (3)$$

Oldjuk meg az egyenletet:

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha \cdot h}{g}} \qquad (4)$$

Bevezetve a: $k^2 = \frac{2gh}{v_0^2}$ jelölést:

$$x = \frac{v_0^2}{g}\left(\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha \cdot + k^2}\right) \qquad (5)$$

Ezt deriválva α szerint:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g}\left(-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha\sqrt{\sin^2\alpha \cdot + k^2} + \sqrt{\sin^2\alpha \cdot + k^2}\,\frac{\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha \cdot + k^2}}\right) \quad (6)$$

Szélsőértéket keresünk, tehát: $\frac{dx}{d\alpha} = 0$.

Megoldva, kapjuk a következőt:

$$\cos 2\alpha \cdot \sqrt{\sin^2\alpha \cdot + k^2} = k^2 \sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha \qquad (7)$$

Ezt négyzetre emelve, majd rendezve kapjuk, hogy:

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = k^2 \sin^2\alpha \qquad (8)$$

$$\cot^2\alpha = 1 + k^2 \qquad (9)$$

Felhasználva a következő két azonosságot:

$$\cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad ill. \qquad \cos^2\alpha = \frac{\cot^2\alpha}{1 + \cot^2\alpha} \qquad (10)$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2 + k^2}} \qquad ill. \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{2 + k^2}} \qquad (11)$$

eredményre jutunk. Ezeket a (5) egyenletbe behelyettesítve kapjuk a maximális távolságot:

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 + k^2} \qquad (12)$$

Visszaírva k^2 értékét: $$x_{max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh} \qquad (13)$$

Láthatjuk, hogy az elérhető legnagyobb távolság függ az indítás magasságától és a súlygolyó indítási sebességétől.

Eredményeinket táblázatba foglalva kiszámítottuk az optimális szöget, az elérhető legnagyobb távolságot, valamint összehasonlításképpen 43°, 45°, 47°-os szögek esetén az elérhető távolságot. Jól látható, hogy valóban a lehető legnagyobb távolságot érhetjük el. Bár a 43°-os és az optimális szögek esetében (több mint 13 *m/s* kezdősebességnél) az eredmények gyakorlatilag megegyeznek függetlenül az indítás magasságától.

v_0 (m/s)	h (m)					h (m)					h (m)				
	1,8					2					2,2				
	optimális szög	x_{max}	x_{43}	x_{45}	x_{47}	optimális szög	x_{max}	x_{43}	x_{45}	x_{47}	optimális szög	x_{max}	x_{43}	x_{45}	x_{47}
10	40,68	11,86	11,83	11,75	11,64	40,28	12,03	11,99	11,91	11,78	39,89	12,20	12,14	12,05	11,92
11	41,34	14,02	14,00	13,93	13,80	40,99	14,19	14,17	14,09	13,95	40,65	14,37	14,33	14,24	14,10
12	41,86	16,38	16,37	16,30	16,16	41,56	16,56	16,54	16,46	16,32	41,26	16,73	16,71	16,62	16,47
13	42,29	18,94	18,94	18,87	18,73	42,01	19,12	19,11	19,04	18,88	41,75	19,30	19,29	19,20	19,04
14	42,63	21,71	21,70	21,64	21,49	42,39	21,89	21,88	21,81	21,65	42,15	22,07	22,06	21,98	21,81
15	42,91	24,67	24,67	24,61	24,45	42,70	24,86	24,85	24,79	24,61	42,49	25,04	25,04	24,96	24,77

1. táblázat

Irodalomjegyzék

[1] **Horváth G., Juhász A., Tasnádi P.**, Mindennapok fizikája, ELTE TTK Továbbképzési Csoport, Budapest (1989).