DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
III. kötet, 2015

doi:10.20312/dim.2015.09

Diofantikus számhármasok a Lucas-Lehmer sorozatokban

Gueth Krisztián
NymE TTMK Matematika és Fizikai Intézet
guethk@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Dolgozatunkban egy rögzített negyedrendű Lucas-Lehmer sorozatra megállapítjuk, hogy nem adható meg hozzá diofantikus számhármas. A másodrendű sorozatoknál alkalmazott módszerek itt is használhatók, mert a Lucas-Lehmer sorozatok a másodrendűek számos tulajdonságát megöröklik.

ABSTRACT. In this paper, we state that there does not exist diophantine triple for a given Lucas-Lehmer sequence. The methods applied for binary sequences can be used here, too, because the Lucas-Lehmer sequences inherit many properties of the recurrences of order two.

1 Bevezetés

Diofantikus szám n-esen olyan $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ pozitív egész számokból álló halmazt értünk, melyekre $a_i a_j + 1$ minden i, j-re négyzetszámot ad. A kérdést az ókorban racionális számokra tekintették, Diofantosz találta az első ilyen számnégyest: 1/16, 33/16, 17/4 és 105/16.

A problémát négyzetszámok helyett egy adott lineáris rekurzív sorozat elemeire vizsgálták az $n = 3$ esetben. Florian Luca és Szalay László [2] bebizonyították, hogy a Fibonacci sorozathoz nem adható meg diofantikus számhármas, azaz nincsenek olyan $0 < a < b < c$ egészek, hogy $ab + 1 = F_x$, $ac + 1 = F_y$ és $bc + 1 = F_z$ volna valamely x, y és z indexekre. Szintén az ő eredményük [3], hogy a Fibonacci-sorozat asszociáltjához, a Lucas-sorozathoz egyetlen ilyen hármas létezik: $a = 1$, $b = 2$ és $c = 3$. A nevezett két szerző, valamint Clemens Fuchs [1] megadtak egy szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy nem degenerált másodrendű sorozathoz végtelen sok hármas létezzen.

2 Probléma és megoldása

Mi a problémát bizonyos fajta negyedrendű sorozatokra vizsgáljuk. A Lucas-Lehmer sorozaton olyan negyedrendű sorozatot értünk, melynek rekurziójában az n-edik tag csak az $(n-2)$-edik és az $(n-4)$-edik függvénye, és a kezdőelemekre is teszünk megszorításokat. Egész pontosan legyenek $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, valamint G_2 és G_3 tetszőleges egész számok, továbbá $n \geq 4$ esetén $G_n = AG_{n-2} + BG_{n-4}$, ahol A és B adott egész együtthatók.

Ezek közül is egy konkrét sorozattal foglalkozunk, az $A = 4, B = -1$ választás esetén. A továbbiakban az (L_n) sorozaton az $L_0 = 0$, $L_1 = 1$, $L_2 = 1$, $L_3 = 3$ kezdőelemekkel megadott $L_n = 4L_{n-2} - L_{n-4}$sorozatot értjük. Az alábbi állítást bizonyítottuk.

Tétel. Nem léteznek olyan $0 < a < b < c$ egész számok és x, y, z nem-negatív egész indexek, hogy

$$ab + 1 = L_x$$
$$ac + 1 = L_y$$
$$bc + 1 = L_z$$

teljesüljön.

A bizonyítás, többek között, azon múlik, hogy $L_n - 1$mindig felbomlik az (L_n) sorozat és asszociált (M_n) sorozata megfelelő tagjainak szorzatára. Például

$$L_n - 1 = L_{(n-1)/2} M_{(n+1)/2}, \qquad ha \quad n \equiv 1 \pmod 4).$$

Irodalomjegyzék

[1] **C. Fuchs, F. Luca, L. Szalay**., Diophantine triples with values in binary recurrences, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. III, 5 (2008) 579–608.

[2] **F. Luca, L. Szalay**., Fibonacci Diophantine Triples, Glasnik Math., 43(63) (2008) 253–264. (doi: http://dx.doi.org/10.3336/gm.43.2.03)

[3] **F. Luca, L. Szalay**., Lucas Diophantine Triples, Integers, 9 (2009) 441–457.