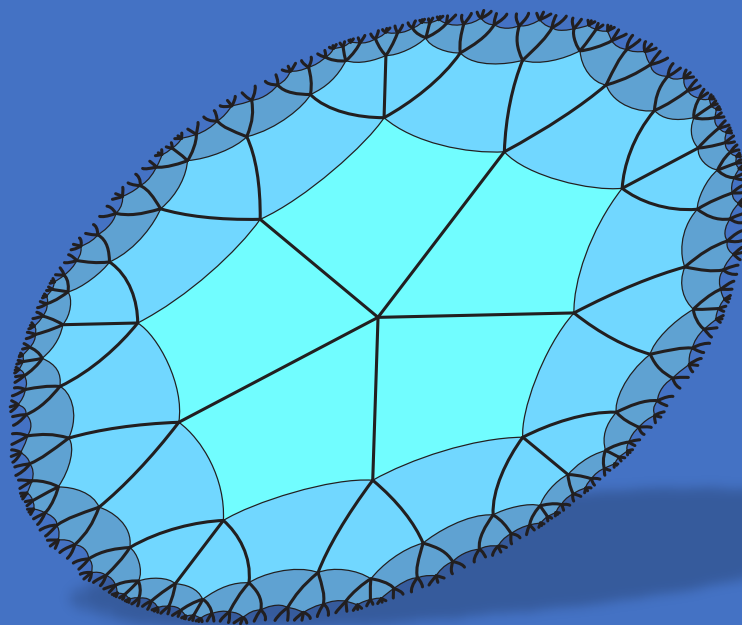


Dimenziók

Matematikai Közlemények

I. kötet



**NyME EMK Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság
2013**

**Matematika Oktatás és KUtatás
Szeminárium
(MOKUS 2013)**

Konferenciakötet

NymE EMK Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság

Szerkesztők:

Dr. Závoti József
egyetemi tanár

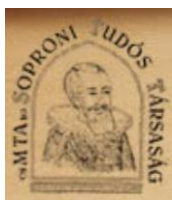
Dr. Szalay László
intézetigazgató egyetemi docens

Dr. Németh László
egyetemi docens

Nyugat-magyarországi Egyetem
Erdőmérnöki Kar
Matematikai Intézet
9400 Sopron, Ady Endre út 5.



MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.



Kiadja: NymE EMK Matematikai Intézet és Soproni Tudós Társaság

ISBN 978-963-359-019-5

Tartalomjegyzék

| | |
|--|----|
| A Busche-Ramanujan azonosságok | 3 |
| Gömbháromszögtan és szférikus csillagászat ortogonális vetületben | 5 |
| Balansz számok és általánosításai..... | 11 |
| A Diophantine Equation Including Balancing Numbers | 15 |
| Nemlineáris regressziók alkalmazása gyakorlati példákban..... | 19 |
| A matematika és statisztika találkozási pontjai a Nyugat-magyarországi Egyetem Közgazdaságtudományi Karának oktatásában | 27 |
| „Átmenet” a középiskola és az egyetem között egy matematika tanár szemével..... | 33 |
| A 3D, 7-paraméteres dátum transzformáció megoldása Gröbner-bázisban és a Bursa- Wolf modellben..... | 37 |
| A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció egy egyszerű megoldása | 45 |
| Adatbányászat – FIM algoritmusok..... | 51 |
| A (4,5,4,5) mozaikhoz tartozó kristálynövekedési hányados | 57 |

A Busche-Ramanujan azonosságok

Tóth László

Pécsi Tudományegyetem, Pécs
és
Universität für Bodenkultur, Wien

Egy $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ számelméleti függvényt teljesen multiplikatívnak nevezünk, ha $g(mn) = g(m)g(n)$ teljesül minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen g és h két teljesen multiplikatív számelméleti függvény és jelölje $f = g * h$ ezek Dirichlet-konvolúcióját. A Busche-Ramanujan azonosságok szerint minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(mn) = \sum_{d|(m,n)} f\left(\frac{m}{d}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) g(d) h(d),$$

ahol μ a Möbius-függvény és

$$f(m)f(n) = \sum_{d|(m,n)} f\left(\frac{mn}{d^2}\right) g(d) h(d).$$

Például ezek az azonosságok fennállnak a következő speciális f függvényekre:

- (i) a $\sigma_k = id_k * 1$ függvényre, ahol $id_k(n) = n^k$, $1(n) = 1$ ($k \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$), speciálisan a $d = 1 * 1$ osztófüggvényre és az osztók számát jelentő $\sigma = id * 1$ függvényre, ahol $id(n) = n$ ($n \in \mathbb{N}$);
- (ii) a $\beta = \lambda * id$ függvényre, ahol λ a Liouville-függvény, itt β az alternáló szigma-függvény, lásd [7];
- (iii) az $R_1 = 1 * \chi$ függvényre, ahol χ a főkaraktertől különböző (mod 4) karakter, itt $R(n) = 4R_1(n)$ az $n = x^2 + y^2$ egyenlet $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldásainak a száma;
- (iv) a Ramanujan-féle τ függvényre, amely így definiált:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24}, \quad |x| < 1,$$

ahol $\tau = g_1 * g_2$ bizonyos teljesen multiplikatív g_1 és g_2 függvényekre úgy, hogy $g_1(n)g_2(n) = n^{11}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, lásd például [1] és [4].

Az Busche-Ramanujan formulák történetére és általánosításaira vonatkozóan lásd például a [2], [3], [5], [6] és [9] cikkeket.

A következő új eredményt a [8] dolgozatban bizonyítottam:

Tétel. Legyenek f_1, \dots, f_k teljesen multiplikatív függvények ($k \in \mathbb{N}$) és legyen $F = f_1 * \dots * f_k$. Legyen ϑ_F az a kétváltozós multiplikatív függvény, amely minden p prím és minden $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén az

$$\vartheta_F(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}) = \begin{cases} 1, & \nu_1 = \nu_2 = 0, \\ (-1)^{\nu_1 + \nu_2 - 1} e_{\nu_1 + \nu_2}(f_1(p), \dots, f_k(p)), & \nu_1, \nu_2 \geq 1, \nu_1 + \nu_2 \leq k, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

értékeket veszi fel, ahol $e_d(x_1, \dots, x_k)$ az x_1, \dots, x_k határozatlanú, d -fokú elemi szimmetrikus polinomokat jelöli. Továbbá jelölje ϑ_F^{-1*} az ϑ_F függvény inverzét a kétváltozós konvolúcióra nézve. Akkor minden $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ esetén

$$F(n_1 n_2) = \sum_{a_1 | n_1, a_2 | n_2} F\left(\frac{n_1}{a_1}\right) F\left(\frac{n_2}{a_2}\right) \vartheta_F(a_1, a_2),$$

és

$$F(n_1) F(n_2) = \sum_{a_1 | n_1, a_2 | n_2} F\left(\frac{n_1 n_2}{a_1 a_2}\right) \vartheta_F^{-1*}(a_1, a_2).$$

Ha $k = 2$, akkor visszkapjuk az eredeti Busche-Ramanujan képleteket. Az érdeklődő Olvasó a [8] dolgozatban egy másik általánosítást is talál.

Irodalomjegyzék

- [1] T.M. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Second ed., Springer, 1990.
- [2] N. Balasubramanian, On the Busche-Ramanujan identities, *Nieuw Arch. Wiskd.*, IV. Ser., 15, (1997), 133--140.
- [3] P. Haukkanen, Classical arithmetical identities involving a generalization of Ramanujan's sum, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A I, Diss., 68 (1988), 69 pp.
- [4] F. Luca and I. E. Shparlinski, Arithmetic properties of the Ramanujan function, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 116 (2003), No. 1, 1--8.
- [5] P. J. McCarthy, Busche-Ramanujan identities, *Amer. Math. Monthly*, 67 (1960), 966--970.
- [6] A. Mercier, Une représentation pour la série de Dirichlet engendrée par $f(n^r M)$, où f est multiplicative, *Colloq. Math.*, 57 (1989), 353--359.
- [7] L. Tóth, A survey of the alternating sum-of-divisors function, *Acta Univ. Sapientiae, Math.*, közlésre elfogadva, <http://de.arxiv.org/abs/1111.4842>.
- [8] L. Tóth, Two generalizations of the Busche-Ramanujan identities, *Int. J. Number Theory*, közlésre elfogadva.
- [9] R. Vaidyanathaswamy, The theory of multiplicative arithmetic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33 (1931), 579--662.

Gömbháromszögtan és szférikus csillagászat ortogonális vetületben

Péntek Kálmán

NyME SEK TTK Matematika és Fizikai Intézet,
Matematikai Intézeti Tanszék

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a gömbháromszögtan nevezetes tételeit tárgyaljuk. A tételek bizonyításának egységes alapötlete az lesz, hogy az egységnyi sugarú gömb felületét ortogonális vetítéssel leképezzük egy síkra. A gömbháromszög vetületét alkalmas gömbi forgatásokkal olyan helyzetbe hozzuk, hogy annak egyik oldala a vetület peremkörére kerüljön, s ebben a helyzeten végezzük el a bizonyítást Kramer (1927), Lietzmann (1949), Meyer (1937), Thomas (1939) nyomán.

A gömbháromszög további két oldalát szintén alkalmas forgatásokkal a képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozzuk. Hasonlóképp a peremkörre hozott oldalon fekvő két szöget is képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozva tudjuk számításainkat egészen elemi úton elvégezni.

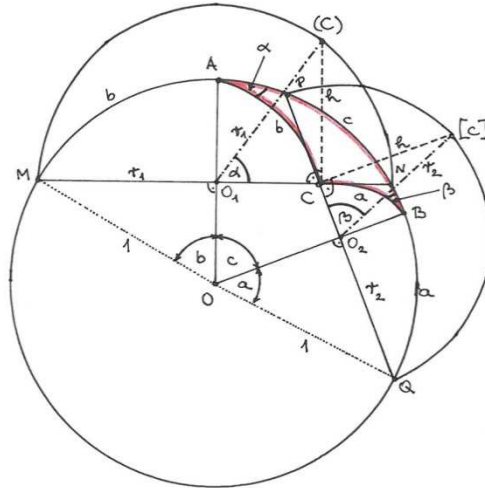
Eredményeink sikeresen alkalmazhatók a szférikus csillagászati problémák tárgyalása során is.

2. A gömbháromszögtan sinus tétele

Az ABC Δ általános gömbháromszögben érvényes az alábbi összefüggés:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

BIZONYÍTÁS. Az 1. ábra jelöléseit felhasználva első lépésben alkalmas forgatásokkal hozzuk a gömbháromszöget olyan helyzetbe, hogy annak $c = AB$ oldala a vetület peremkörére kerüljön, a C csúcs pedig a felénk eső félgömbre essék. Forgassuk ezután a háromszög $b = AC$ oldalát az AO tengely körül a képsíkkal párhuzamos $b = AM$ vég helyzetbe, s teljesen hasonlóan a háromszög $a = BC$ oldalát pedig a BO tengely körül szintén a képsíkkal párhuzamos $a = BQ$ vég helyzetbe. Vetítősík esetén a háromszög $\alpha = BAC$ szögét merőlegesen az O_1 középpontú, az ábra síkjára merőleges gömbi kiskörre, majd a vetületi, szintén α nagyságú szöget forgassuk a kiskör MN átmérője körül a képsíkkal párhuzamos helyzetbe. Ekkor nyerjük az $\alpha = CO_1(C)$ szöget. Teljesen hasonlóan vetítsük a háromszög $\beta = ABC$ szögét merőlegesen az O_2 középpontú, az ábra síkjára merőleges gömbi kiskörre, majd a vetületi, szintén β nagyságú szöget forgassuk a kiskör PQ átmérője körül a képsíkkal párhuzamos helyzetbe. Ekkor nyerjük a $\beta = CO_2[C]$ szöget.



1. ábra. A gömbháromszögtan sinus tétele

Az $OO_1M\Delta$ derékszögű háromszögről $\sin b = \frac{r_1}{1}$, s így $\sin b = r_1$, az $OO_2Q\Delta$ derékszögű háromszögről pedig $\sin a = \frac{r_2}{1}$, ezért $\sin a = r_2$ adódik. Ezek felhasználásával

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{r_2}{r_1} \quad (1)$$

következik.

Az $O_2C[C]\Delta$ derékszögű háromszögből $\sin \beta = \frac{h}{r_2}$, az $O_1C(C)\Delta$ derékszögű háromszögből pedig $\sin \alpha = \frac{h}{r_1}$ adódik. Ezekből azonnal

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\frac{h}{r_1}}{\frac{h}{r_2}} = \frac{r_2}{r_1} \quad (2)$$

következik.

Az (1) és (2) összefüggések egybevetéséből közvetlenül adódik a

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (3)$$

formula, amely a tételnek állítása. \square

A fentiek alapján a tétel a következő általánosabb formában is igaz: Az általános $ABC \Delta$ gömbháromszögben érvényes az alábbi összefüggés:

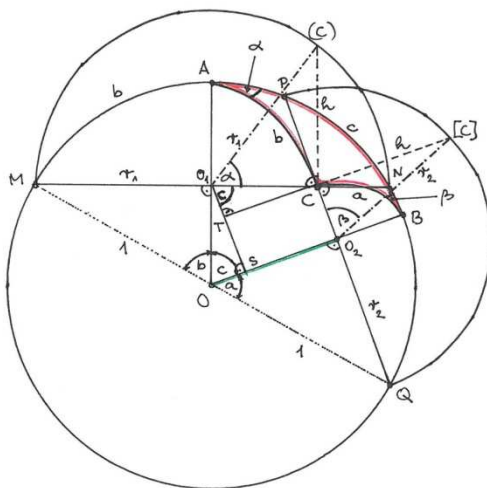
$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

3. A gömbháromszögtan oldalakra vonatkozó cosinus tétele

Az $ABC \Delta$ általános gömbháromszögben érvényes az alábbi összefüggés:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha.$$

BIZONYÍTÁS. A 2. ábra jelöléseit felhasználva a sinus tételnél látott módszerrel hozzuk a $c = AB$ oldalt a vetület peremkörére, forgassuk a képsíkkal párhuzamos helyzetbe a $b = AC$, illetve $a = BC$ oldalakat, valamint az $\alpha = BAC$ és $\beta = ABC$ szögeket.



2. ábra. A gömbháromszögtan oldalakra vonatkozó cosinus tétele

Az $OO_2Q\Delta$ derékszögű háromszögből $\cos a = \frac{OO_2}{1}$, s így a

$$\cos a = OO_2 \quad (4)$$

összefüggés adódik.

Az $OO_1M\Delta$ derékszögű háromszög felhasználásával $\cos b = \frac{OO_1}{1}$, s így $\cos b = OO_1$, azaz $OSO_1\Delta$ derékszögű háromszögből pedig $\cos c = \frac{OS}{OO_1}$, s ezért $OS = OO_1 \cdot \cos c$ következik. E két utóbbi észrevétel alapján

$$OS = \cos b \cdot \cos c \quad (5)$$

összefüggés adódik.

Az $OO_1M\Delta$ derékszögű háromszögből $\sin b = \frac{r_1}{1}$, s ezért $\sin b = r_1$, az $O_1C(C)\Delta$ derékszögű háromszögből $\cos \alpha = \frac{O_1C}{O_1(C)} = \frac{O_1C}{r_1}$, amelyből azonnal $O_1C = r_1 \cdot \cos \alpha$, s ebből az $O_1C = \sin b \cdot \cos \alpha$ következik. Az $O_1TC\Delta$ derékszögű háromszögből $\sin c = \frac{TC}{O_1C}$, s ebből $TC = O_1C \cdot \sin c$ adódik, amely az előző mondat megállapításával együtt adja a

$$TC = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad (6)$$

összefüggést.

Vegyük észre, hogy a TSO_2C □ négyzög téglalap, s ezért a fentiek felhasználásával

$$SO_2 = TC = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad (7)$$

adódik. Mivel azonban $OO_2 = OS + SO_2$, így a (4), (5) és (7) alapján

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad (8)$$

következik, amely tételünk állítása. □

A fentiek alapján a tétel a következő formákban is még megfogalmazható:

Az általános $ABC \Delta$ gömbháromszögben érvényesek az alábbi összefüggések:

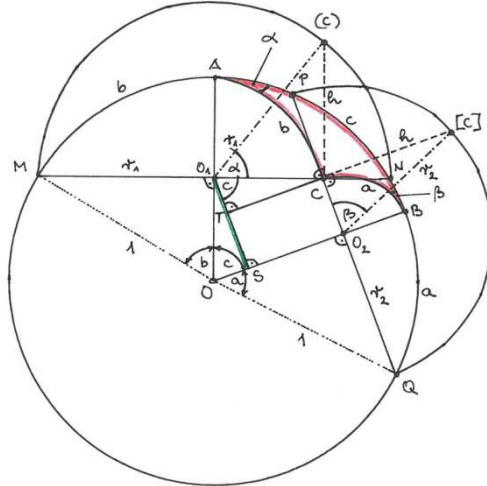
$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta, \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

4. A gömbháromszögtan sinus-cosinus tétele

Az $ABC \Delta$ általános gömbháromszögben érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sin a \cdot \cos \beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha$$

BIZONYÍTÁS. A 3. ábra jelöléseit felhasználva a két előző tételnél látott módszerrel hozzuk a $c = AB$ oldalt a vetület peremkörére, forgassuk a képsíkkal párhuzamos helyzetbe a $b = AC$, illetve $a = BC$ oldalakat, valamint az $\alpha = BAC \sphericalangle$ és $\beta = ABC \sphericalangle$ szögeket.



3. ábra. A gömbháromszögtan sinus-cosinus tétele

Az $OO_2Q\Delta$ derékszögű háromszögből $\sin a = \frac{r_2}{1}$, ahonnan $\sin a = r_2$ adódik. Az $O_2C[C]\Delta$ derékszögű háromszögből $\cos \beta = \frac{O_2C}{O_2[C]}$, ebből $\cos \beta = \frac{O_2C}{r_2}$, ahonnan $O_2C = r_2 \cdot \cos \beta$ következik. E két fenti megállapításból pedig $O_2C = \sin a \cdot \cos \beta$, s mivel $TSO_2C \square$ téglalap, ezért érvényes a

$$TS = O_2C = \sin a \cdot \cos \beta \quad (9)$$

összefüggés.

Az $OO_1M\Delta$ derékszögű háromszögből $\sin b = \frac{r_1}{1}$, ebből $\sin b = r_1$ következik. Az $O_1C(C)\Delta$ derékszögű háromszögből $\cos \alpha = \frac{O_1C}{O_1(C)}$, s ebből $O_1C = r_1 \cdot \cos \alpha$ következik. A fenti két megállapításból $O_1C = \sin b \cdot \cos \alpha$ adódik.

Az $O_1TC\Delta$ derékszögű háromszög felhasználásával $\cos c = \frac{O_1T}{O_1C}$, amiből $O_1T = O_1C \cdot \cos c$ adódik, s az előző bekezdés megállapítása alapján

$$O_1T = \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha \quad (10)$$

összefüggés lesz érvényes.

Az $OO_1M\Delta$ derékszögű háromszögből $\cos b = \frac{OO_1}{1}$, s ebből $\cos b = OO_1$, az $OSO_1\Delta$ derékszögű háromszögből $\sin c = \frac{O_1S}{OO_1}$, amiből $O_1S = OO_1 \cdot \sin c$ adódik, e két észrevételünkből együttesen következik az

$$O_1S = \cos b \cdot \sin c \quad (11)$$

összefüggés.

Mivel azonban $O_1S = O_1T + TS$, így a (9), (10) és (11) alapján

$$\cos b \cdot \sin c = \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha + \sin a \cdot \cos \beta, \quad (12)$$

amelynek egyszerű átrendezésével

$$\sin a \cdot \cos \beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha \quad (13)$$

következik, amely tételünk állítása. \square

A fentiek alapján a tétel a következő formákban is még megfogalmazható:

$$\begin{aligned} \sin b \cdot \cos \gamma &= \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos \beta \\ \sin c \cdot \cos \alpha &= \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin a \cdot \cos \gamma &= \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos \alpha \\ \sin b \cdot \cos \alpha &= \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos \beta \\ \sin c \cdot \cos \beta &= \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

5. További nevezetes összefüggések

A fentiekben tárgyalt három nevezetes gömbháromszögtani alaptételből már levezethetők a szokásos módon az alábbi nevezetes tételek:

A gömbháromszögtan cotangens tétele:

$$\sin \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} a \cdot \sin c - \cos c \cdot \cos \beta. \quad (14)$$

A gömbháromszögtan poláris sinus-cosinus tétele:

$$\cos a \cdot \sin \gamma = \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos c. \quad (15)$$

A gömbháromszögtan poláris cotangens tétele:

$$\sin c \cdot \operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \beta + \cos \beta \cdot \cos c. \quad (16)$$

A gömbháromszögtan szögekre vonatkozó cosinus tétele:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a. \quad (17)$$

A dolgozatban bemutatott bizonyítási eljárással elegánsan tárgyalhatók a szférikus csillagászat klasszikus alapformulái, s ezek felhasználásával levezethetők még az alkalmazott képletek is.

Irodalom

- [1] Kramer, W. (1927): Zeichnerische Lösung der Grandaufgaben der mathematischen Erd- und Himmelskunde – Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht 40, p. 60-71.
- [2] Lietzmann, W. (1949): Elementare Kugelgeometrie mit numerischen und konstruktiven Methoden – Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen, 292 p.
- [3] Meyer, H. (1937): Zeichnerische Lösungen von Aufgaben aus der mathematischen Erdkunde – Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 43, p. 202-207.
- [4] Thomas, W. (1939): Ein Beitrag zur zeichnerischen Behandlung von Aufgaben aus der mathematischen Himmelskunde – Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 70, p. 15-23.

Balansz számok és általánosításaik

Szalay László
NymE EMK Matematikai Intézet

1. Bevezetés

A balansz számok fogalmát Finkelstein vezette be, amikor a „The house problem” [F] című cikkében vizsgálta az

$$1 + 2 + \dots + (x - 1) = (x + 1) + \dots + (x + r) \quad (1)$$

diofantikus egyenletet az x és r pozitív egészekben. Ő még numerikus középnek hívta az x számot. A kérdést egyébként Adams [A] vetette fel 1955-ben. A fenti egyenletet kielégítő valamely x természetes számot **balansz számnak** nevezzük, míg a hozzá tartozó r természetes számot **balanszernek**. Megoldás például az $(x, r) = (35, 14)$ páros. Belátható, hogy végtelen sok balansz szám létezik, melyek egy sorozattal írhatók le az alábbi módon. Ha B_n -nel jelöljük az n -edik balansz számot, akkor fennáll a

$$B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2}$$

másodrendű rekurzív összefüggés az egymás utáni tagok között. Bár a kezdő egyenlet legkisebb megoldása $(x, r) = (6, 2)$, kényelmi szempontok miatt célszerű a $B_0 = 0$ és $B_1 = 1$ értékeket választani a balansz számok sorozata kezdőelemeinek (ekkor nyilvánvalóan $B_2 = 6$).

A balansz számok akkor „jöttek divatba”, amikor Behera és Panda [BP] újra felfedezte őket. Belátták például, hogy ha $x > 0$ egy balansz szám, akkor a szomszédos balansz számok éppen $3x - \sqrt{8x^2 + 1}$ és $3x + \sqrt{8x^2 + 1}$ lesznek. Liptai Kálmán [L1] azt igazolta, hogy a Fibonacci sorozatnak és a balansz számoknak csak két közös elemük van, melyek éppen a kezdőelemek: 0, 1. A Lucas sorozat balansz számokkal vett metszete egyetlenegy elemet, az 1-et tartalmazza [L1, Sz]. További tájékozódáshoz javasoljuk a jelenleg még fejlesztés alatt álló <http://balancingnumbers.ektf.hu/> honlapot.

2. Általánosítási lehetőségek

2.1. Az (1) egyenlet egy természetes általánosítása, ha valamely egészértékű P és Q polinomok helyettesítési értékeit tekintjük a két oldalon:

$$P(1) + P(2) + \dots + P(x - 1) = Q(x + 1) + \dots + Q(x + r),$$

ahol x és r pozitív egész ismeretlenek. A probléma ebben az általános helyzetben túl bonyolult, ezért a további vizsgálathoz legtöbbször rögzítjük a P és Q polinomokat vagy azok típusát.

Legyen először $P(x) = x^k$, valamint $Q(x) = x^l$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}^+$. Finkelstein [F] igazolta, hogy $k = l = 2$ mellett

$$1^k + 2^k + \dots + (x - 1)^k = (x + 1)^l + \dots + (x + r)^l \quad (2)$$

nem oldható meg a pozitív egész x és r értékekre. Ugyanabban a cikkében azt a sejtést is megfogalmazta, hogy egyáltalán nincs numerikus középpont, ha $k = l$. Később Steiner [S] megerősítette a sejtést, belátva azt $k = l = 3$ esetén. Ingram [IN] megmutatta, hogy rögzített $k = l$ mellett mindig csak véges sok numerikus centrum létezik, és $k = l = 5$ esetén nincs megoldás.

A (2) egyenletet Hajdu Lajos és Pintér Ákos vetették fel, majd [LLPSz]-ben, többek között, bizonyítottuk az alábbi állítást.

1.Tétel. [LLPSz] *Bármely pozitív $k > 1$ esetén csak véges sok pozitív egész (r, l) pár van melyekhez található (2)-t teljesítő pozitív egész x szám. Amennyiben $k < l$, akkor (2)-nek nincs megoldása az x és r egészekben.*

Bár az 1. Tétel nagyon erős állítás, de nem mond semmit arról, hogyan lehet meghatározni az említett véges sok megoldást. Ehhez diofantikus egyenleteket kell megoldani, melyekre nincs általános eljárás. Bizonyos speciális kitevőkre az alábbi táblázat foglalja össze a tényleges megoldásokat.

| (k, l) | (x, r) | megjegyzés, hivatkozás |
|----------|--------------------------|---------------------------------|
| (2,1) | (5,4); (13,25); (36,130) | elliptikus egyenlet, [LLPSz] |
| (3,1) | (3,2); (8,32); (10,54) | szuperelliptikus egyenlet |
| (7,1) | nincs megoldás | Runge módszerrel, publikálatlan |
| (15,3) | nincs megoldás | Runge módszerrel, publikálatlan |

Egy másik fontos irány, amikor $P(x) = Q(x) = ax + b$ lineáris polinomok, rögzített a és b egészek mellett. Olajos Péter [OP] vizsgálta a (2,1)-balansz számokat, illetve azok kapcsolatát más sorozatokkal. A [KLO] cikkben azt elemezték, hogy egy természetes szám mikor lesz egyszerre (a,b) -balansz szám és egy rögzített típusú figurális szám.

2.2. Változtassuk meg most úgy az (1) egyenletet, úgy hogy az egymás után következő természetes számok helyett egy adott $\{s_n\}$ sorozat egymást követő tagjait írjuk:

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{x-1} = s_{x+1} + \dots + s_{x+r}.$$

Ha léteznek olyan x és r pozitív egészek, melyekre az előző egyenlet teljesül, akkor s_x -et **sorozat balansz számnak** hívjuk. Ezt a fogalmat Panda [P] vezette be, és belátta, hogy a Fibonacci sorozatnak nincs balansa. Pozitív diszkriminánsú bináris rekurziókra Bérczes, Liptai és Pink [BLP] hasonló állítást bizonyítottak.

Ezután vetődött fel az

$$s_1^k + s_2^k + \dots + s_{x-1}^k = s_{x+1}^l + \dots + s_{x+r}^l \quad (3)$$

formájú egyenletek vizsgálata. A Fibonacci sorozat esetén megmutattuk [BLPSz], hogy a (3) egyenlet nem oldható meg ha $k < l$, valamint ha $(k, l) = (2, 1), (3, 1), (3, 2)$. A vizsgálat módszere más adott (k, l) párokra is működött volna, de teljes általánosságban nem tudta kezelni a problémát. Ezért fogalmaztuk meg csak sejtésként, hogy a Fibonacci sorozat esetén (3) egyetlen megoldása $(x, r, k, l) = (4, 3, 8, 2)$, melyet aztán Alvarado, Dujella és Luca [ADL] igazoltak. A balansz számok $\{B_n\}$ sorozatára Irmak elemezte a (3) egyenletet, és a [BLPSz] cikk módszerét alkalmazva, ahhoz hasonló eredményre jutott.

2.3. Végezetül megemlítjük, hogy a teljes problémakör felvethető úgy is, hogy a bal és jobb oldalon álló összegek között nem marad ki a balansz tag. Például az (1) egyenlet analóg formája ekkor

$$1 + 2 + \dots + x = (x + 1) + \dots + (x + R)$$

lesz, ahol x **kobalansz szám**, míg R az úgynevezett (x -hez tartozó) **kobalanszer** [PR]. A kobalansz számok egy másodrendű inhomogén rekurzióval írhatók le. Egyik legszebb eredmény a balansz és kobalansz számok viszonyát írja le az alábbi tételben.

2. Tétel. [PR] *Az n -edik kobalanszer lesz az n -edik kobalansz szám, továbbá az $(n+1)$ -edik kobalanszer megegyezik az n -edik balansz számmal.*

Irodalomjegyzék

- [A] J. P. Adams, Puzzles for everybody, Avon Publications, New York, 1955.
- [ADL] S. D. Alvarado, A. Dujella és F. Luca, On a conjecture regarding balancing with powers of Fibonacci numbers, INTEGERS, 12A (2012), #A2.
- [B] G. K. Panda, Sequence balancing and cobalancing numbers, Fibonacci Quart., 45 (2007), 265-271.
- [BP] A. Behera és G. K. Panda, On the square roots of triangular numbers, Fibonacci Quart., 37 (1999), 129-137.
- [BLPSz] A. Behera, K. Liptai, G. K. Panda és L. Szalay, Balancing with Fibonacci powers, Fibonacci Quart., 49 (2011), 28-33.
- [BLP] A. Bérczes, K. Liptai és I. Pink, On generalized balancing sequences, Fibonacci Quart., 48 (2010), 121-128.
- [F] R. P. Finkelstein, The house problem, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 88-89.
- [IN] P. Ingram, On k th-power numerical centres, Compt. Rend. Math. Acad. Sci., 27 (2005), 105-110.
- [IR] N. Irmak, Balancing with balancing powers, közlésre benyújtva.
- [KLO] T. Kovács, K. Liptai és P. Olajos, On (a,b) -balancing numbers, Publ. Math. Debrecen, 77 (2010), 485-498.
- [L1] K. Liptai, Fibonacci balancing numbers, Fibonacci Quart., 42 (2004), 330-340.
- [L2] K. Liptai, Lucas balancing numbers, Acta Math. Univ. Ostrav., 14 (2006), 43-47.
- [LLPSz] K. Liptai, F. Luca, Á. Pintér és L. Szalay, Generalized balancing numbers, Indag. Math. N. S., 20 (2009), 87-100.
- [OP] P. Olajos, A $(2,1)$ típusú balansz számokról, GÉP, 63 (2012), 59-62.
- [PR] G. K. Panda és P. K. Ray, Cobalancing numbers and cobalancers, Int. J. Math. Math. Sci., 8 (2005), 1189-1200.
- [S] R. Steiner, On k th-power numerical centers, Fibonacci Quart., 16 (1978), 470-471.
- [Sz] L. Szalay, On the resolution of simultaneous Pell equations, Ann. Math. Info., 34 (2007), 77-87.

A Diophantine Equation Including Balancing Numbers

Nurettin Irmak

Niğde University, Art and Science Faculty,
Mathematics Department, Niğde, Turkey

1. Introduction

The first definition of balancing numbers is essentially due to Finkelstein [5], though he named them numerical centers. A positive integer $n \geq 2$ is called balancing number if

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r)$$

holds for some positive integer r which is called balancer corresponding to the balancing number n . The m^{th} term of the sequence of balancing numbers is denoted by B_m . It is known that the balancing numbers satisfy the recurrence

$$B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2},$$

where the initial conditions are defined by $B_0 = 0$ and $B_1 = 1$.

The Binet formula of the balancing numbers is given by

$$B_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

where α and β are the roots of the characteristic polynomial $x^2 - 6x + 1$.

Behera et al. [3] showed that the diophantine equation

$$F_1^k + F_2^k + \dots + F_{n-1}^k = F_{n+1}^l + F_{n+2}^l + \dots + F_{n+r}^l \quad (1)$$

has no solution in the positive integers (n, r, k, l) with $n \geq 2$ in the cases $(k, l) = (2, 1), (3, 1), (3, 2)$. Here F_n denotes n^{th} Fibonacci number. They also conjectured in [3] that only the quadruples $(n, r, k, l) = (4, 3, 8, 2)$ satisfies (1). Their conjecture was proved by Alvarado et. al. [2].

We focus on the equation

$$B_1^k + B_2^k + \dots + B_{n-1}^k = B_{n+1}^l + B_{n+2}^l + \dots + B_{n+r}^l. \quad (2)$$

In the specific cases, we found no solutions. Based on Theorems 6-9 and an extended computer search, we conjecture the following.

Conjecture: There is no quadruple (n, r, k, l) of positive integers $n \geq 2$ which satisfies (2).

2. Lemmas

The proofs of the theorems use several statements collected in this section.

Lemma 1. For any positive integer m

(a) $B_{m+1}B_{m-1} = (B_m + 1)(B_m - 1)$,

- (b) $B_{2m-1} = B_m^2 - B_{m-1}^2$,
(c) $B_1 + B_3 + \cdots + B_{2m-1} = B_m^2$,
(d) $B_1^2 + B_2^2 + \cdots + B_{m-1}^2 < B_{m+1} + B_{m+2} + \cdots + B_{2m-3}$ for $m \geq 5$,
(e) $B_{2m+5}^2 + B_{2m+6}^2 + \cdots + B_{3m+4}^2 < B_1^3 + B_2^3 + \cdots + B_{2m+3}^3$ for $m \geq 2$,
(f) $4B_m < B_{m+1} - B_m < 5B_m$
hold.

Lemma 2. Any positive integer n satisfies

- (a) $\sum_{k=1}^n B_k = (B_{n+1} - B_n - 1)/4$,
(b) $\sum_{k=1}^n B_k^2 = (B_{2n+1} - (2n + 1))/32$,
(c) $\sum_{k=1}^n B_k^3 = (B_{3n+3} - B_{3n} - 147(B_{n+1} - B_n) + 112)/6272$.

Lemma 3. For any integer $u \geq 3$, the inequalities

$$\alpha^{u-0.99} < B_u < \alpha^{u-0.98}$$

hold.

Lemma 4. Suppose that $a > 0$ and $b \geq 0$ are real numbers and u_0 is a positive real number. Then $\alpha^u + b \leq \alpha^{u+\tau}$ holds for any $u \geq u_0$, where $\tau = \log_a(a + \frac{b}{\alpha^{u_0}})$.

3. The results

Here we present four theorems and the proof of the last one. They confirm the conjecture.

Theorem 1. The Diophantine equation $B_1^k + B_2^k + \cdots + B_{n-1}^k = B_{n+1}^l + B_{n+2}^l + \cdots + B_{n+r}^l$ has no solution for any positive integers r and $n \geq 2$ if $k \leq l$.

Theorem 2. The Diophantine equation $B_1^2 + B_2^2 + \cdots + B_{n-1}^2 = B_{n+1} + B_{n+2} + \cdots + B_{n+r}$ has no solution in positive integer r and $n \geq 2$.

Theorem 3. The Diophantine equation $B_1^3 + B_2^3 + \cdots + B_{n-1}^3 = B_{n+1} + B_{n+2} + \cdots + B_{n+r}$ has no solution for any positive integer r and $n \geq 2$.

Theorem 4. The Diophantine equation $B_1^3 + B_2^3 + \cdots + B_{n-1}^3 = B_{n+1}^2 + B_{n+2}^2 + \cdots + B_{n+r}^2$ has no solution for any positive integer r and $n \geq 2$.

PROOF OF THEOREM 4. For $2 \leq n \leq 4$ the statement is obvious. Assume now $n \geq 5$. The application of Lemma 3(b) and (c) convert the equation

$$B_1^3 + B_2^3 + \cdots + B_{n-1}^3 = B_{n+1}^2 + B_{n+2}^2 + \cdots + B_{n+r}^2.$$

To

$$\frac{B_{3n} - B_{3(n-1)} - 147(B_n - B_{n+1}) + 112}{32 \cdot 196} = \frac{1}{32}(B_{2(n+r)+1} - B_{2n+1} - 2r).$$

Which is equivalent to

$$B_{3n} - B_{3(n-1)} - 147(B_n - B_{n+1}) + 196B_{2n+1} + 112 = 196(B_{2(n+r)+1} - 2r).$$

Put

$$LS := B_{3n} - B_{3(n-1)} - 147(B_n - B_{n+1}) + 196B_{2n+1} + 112,$$

$$RS := 196(B_{2(n+r)+1} - 2r).$$

Now use Lemma 4 and Lemma 2 (f) to obtain

$$\alpha^{2n+2r+3} < RS < \alpha^{2n+2r+3.02}.$$

Similarly,

$$196B_{3(n-1)} < LS < (196 + 197)B_{3(n-1)},$$

$$\alpha^{3n-1.01} < LS < \alpha^{3n-0.59}$$

hold. By the equation above

$$\max\{2n + 2r + 3, 3n - 1.01\} < \min\{2n + 2r + 3.02, 3n - 0.59\}$$

follows, which yields

$$n - 4.03 < 2r < 3.59.$$

Clearly, only $2r = n - 4$ is possible. Inserting $n = 2r + 4$ to the equation, we obtain

$$B_1^3 + B_2^3 + \cdots + B_{2r+5}^3 = B_{2r+5}^2 + B_{2r+6}^2 + \cdots + B_{3r+4}^2,$$

and we arrived at a contradiction with Lemma 2(e).

References

- [1] M. Alp, N. Irmak, and L. Szalay, Diophantine Balancing Triples, *Acta Univ. Sapientiae*, vol. 4, No. 4, pp.11-19, 2012.
- [2] S. D. Alvarado, A. Dujella, and F. Luca, On a conjecture regarding balancing with powers of Fibonacci numbers, *INTEGERS*, vol. 12A, 2012.
- [3] A. Behera, K. Liptai, G. K. Panda, and L. Szalay, Balancing with Fibonacci powers, *Fibonacci Quart.*, vol. 49, No. 1, pp.28.33, 2011.
- [4] A. Behera, and G. K. Panda, On the square roots of triangular numbers, *Fibonacci Quart.*, vol. 37, No. 2, pp.98-105, 1999.
- [5] R. P. Finkelstein, The House Problem, *Amer. Math. Monthly*, vol. 72, pp. 1082-1088, 1965.
- [6] G. K. Panda, Sequence balancing and cobalancing numbers, *Fibonacci Quart.*, vol. 45, No. 3, pp.265-271, 2007.
- [7] G. K. Panda, Some fascinating properties of balancing numbers, *Proceedings of the Eleventh International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications*, *Cong. Numer.*, vol. 194, pp. 185-189, 2009.

Nemlineáris regressziók alkalmazása gyakorlati példákban

Csanády Viktória
 NymE EMK Matematikai Intézet

A természetben előforduló különböző folyamatok vizsgálata során nyert, egy független és egy függőváltozós adatsorokra regressziós eljárással matematikai függvények illeszthetők, melyek meghatározzák a folyamatok törvényszerűségét. Az adatsorok által meghatározott pontok grafikus szemlélete alapján mód van megfelelő illesztendő függvény vagy függvények kiválasztására. A helyes döntést alapvetően a számítógépes regressziós eljárás végrehajtása során nyert 1-hez legközelebb álló korrelációs együttható (R) indokolhatja amellet, hogy a kiválasztott függvény számított paraméterei a valóságnak megfelelően értelmezhetők legyenek. A bemutatásra és elemzésre kerülő adatsorok a természetben előforduló folyamatok adatsorait modellezik a gyorsabb és egyszerűbb regressziós eljárások alkalmazása és értékelése érdekében.

1. Növekedési függvények

1.1. Telítési függvény (Awrami)

Az első adatsor az idő függvényében a fanövekedés értékeit vizsgálja. Az adatsor előzetes áttekintése vagy grafikus ábrázolása alapján könnyen megállapítható, hogy a függvény illesztéséhez telítési függvény alkalmazása a célszerű.

A matematikai alak: $y = a(1 - e^{-(bx)^c}) + d$.

A regressziós eljáráshoz szükséges kezdőértékeket, a nyert paraméter értékeket, a korrelációs együtthatót és az értelmezést az alábbi táblázat tartalmazza.

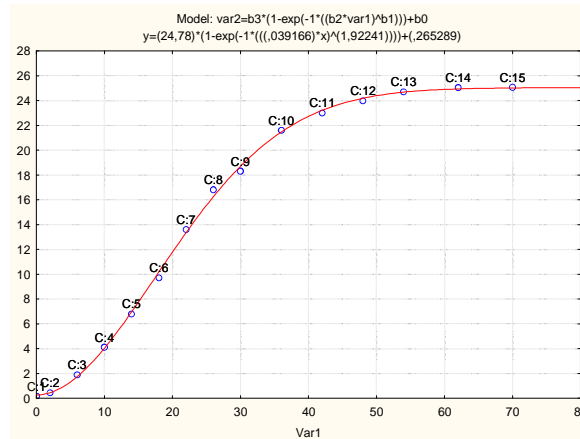
Kezdőértékek: $b_3=b_2=b_1=b_0=0,1$ (a programban alapbeállításként szereplő értékek, módosítást nem igényelnek) $var1=$ évek száma (év), $var2=$ famagasság (m).

| | | | | |
|---|----------|----------|----------|----------|
| Model: $var2=b_3*(1-\exp(-1*((b_2*var1)^{b_1}))+b_0$ (pelda1) | | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | | |
| Final loss: ,929228643 R= ,99965 Variance explained: 99,929% | | | | |
| N=15 | b3 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 24,78002 | 0,039166 | 1,922410 | 0,265289 |

Értelmezés: $b_3+b_0=$ az elért legnagyobb (végső) famagasság (m), $b_0=$ a kezdő famagasság (m). Megadható az a $var1$ érték (x), melynél a határértéktől való eltérés 1%-os a $var2$ -re nézve.

Ez az alábbi képlettel számítható: $lnx = \frac{1}{b_1} \ln \left(\ln \frac{100}{1+\frac{b_0}{b_3}} \right) - lnb_2$.

Az illesztés grafikus reprezentációja:



Az előző függvény illesztése módosított kezdőértékekkel is végrehajtható, az eredmény nem változik, a függvény illesztése a kezdőértékekre kevésbé érzékeny. Nem ezt tapasztaljuk más típusú növekedési görbék estén. Az Awrami féle telítési függvényen kívül még számos hasonló növekedési görbe létezik. Az egyszerűbb nem rendelkezik inflexiós ponttal, az összetettebbek igen. Az alábbiakban a felhasznált példaszor alkalmazásával megadásra kerül illesztési eredményük, a paraméterek, a korrelációs együttható értéke, végül, de nem utolsó sorban a futtatásnál módosított kezdőértékek, melyek módosítása nélkül nem kapunk eredményt, vagy ha igen csak gyenge korrelációval. A paraméterek kezdőértékeinek kiokoskodása a függvény matematikai jellemzőinek ismeretében történhet, az adatszort figyelembevételével.

Minden egyes illesztésnél a var2 a famagasságot jelöli, var1 a független változó, az időt.

1.2. Bertalanffy növekedési függvénye

Matematikai alak: $y = a(1 - be^{-cx})$. Kezdőértékek: $b_2=b_1=b_0=0,1$.

| | | | |
|----------|--|----------|----------|
| | Model: var2=b2*(1-b1*exp(-1*(b0*var1))) (pelda1) | | |
| | Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | |
| | Final loss: 34,694807684 R= ,98669 Variance explained: 97,356% | | |
| N=15 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 31,56415 | 1,069303 | 0,028769 |

1.3. Mitscherlich növekedési függvénye

Matematikai alak: $y = a(1 - e^{-bx})^c$. Kezdőértékek: $b_2=b_1=b_0=1$.

| | | | |
|----------|---|----------|----------|
| | Model: var2=b2*(1-Exp(-1*b1*var1))^b0 (pelda1) | | |
| | Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | |
| | Final loss: 2,393042626 R= ,99909 Variance explained: 99,818% | | |
| N=15 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 25,85456 | 0,077052 | 3,136495 |

1.4. Richards növekedési függvénye

Matematikai alak: $y = a(1 - be^{-cx})^d$. Kezdőértékek: $b_3=10$ $b_2= -1$ $b_1=0,5$ $b_0=0,1$.

| | | | |
|----------|---|-----------|----------|
| | Model: var2=b2*(1-Exp(b1*var1))^b0 (pelda1) | | |
| | Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | |
| | Final loss: 2,393042626 R= ,99909 Variance explained: 99,818% | | |
| N=15 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 25,85457 | -0,077052 | 3,136496 |

1.5. Chapman-Richard függvény

Matematikai alak: $y = a(1 - e^{bx})^c$. Kezdőértékek: $b_2=10$ $b_1= -1$ $b_0=0,5$.

| | | | |
|---|----------|-----------|----------|
| Model: $var2=b_2*(1-Exp(b_1*var1))^b_0$ (pelda1) | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | |
| Final loss: 2,393042626 R= ,99909 Variance explained: 99,818% | | | |
| N=15 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 25,85457 | -0,077052 | 3,136496 |

1.6. Colin-Fokasz függvény

Matematikai alak: $y = a + \frac{(b-a)}{(1+ce^{-d(x-h)})^c}$.

Kezdőértékek: $b_0=10$ $b_1= -1$ $b_2=0,5$ $b_3=0,1$ $b_4=1$.

| | | | | | |
|---|----------|----------|----------|-----------|----------|
| Model: $var2=b_0+(b_1-b_0)/(1+b_2*Exp(-1*b_3*(var1-b_4)))^{1/b_2}$ (pelda1) | | | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | | | |
| Final loss: ,717894104 R= ,99973 Variance explained: 99,945% | | | | | |
| N=15 | b0 | b1 | b2 | b3 | b4 |
| Estimate | 25,39397 | -1,28865 | 1,733523 | -0,155553 | 18,46158 |

A fenti példák azt illusztrálják, hogy bár számos telítési, nevezzük inkább növekedési folyamatot részében vagy teljességében (negatív értékekre is értelmezett függvények szerepeltek a felsoroltak között) leíró függvényeket ismerünk, ezek alkalmazása a gyakorlatban a számítógépes statisztikai programok használata esetén is gondot okoz. Az alkalmazott modell megválasztás esetén szem előtt tartandók az igények a paraméterek értelmezhetőségére, valamint a kezdőértékek megválasztásának, illetve kiválasztásának egyszerűségére, nem beszélve a modell alkalmazhatóságáról (az Awrami féle függvény akkor is alkalmazható, ha nincs inflexiós pont). Ezen kívül a modell értelmezési tartományának vizsgálata sem elhanyagolható, a már említett negatív független változók (példákban az idő) vonatkozásában, hiszen ez nem értelmezhető.

2. Rönkleltár

Egy faraktárban elhelyezett válogatással nyert rönkök leltárát elemzi az átmérő függvényében található darabszám szerint a feladat. Az adatsor egyszerű áttekintése alapján rögtön megállapítható, hogy megfelelően transzformált Gauss-görbe illesztése a célszerű.

A matematikai alak: $y = \frac{a}{e^{(b(x-c))^2}} + d$. Kezdőértékek: $b_3=b_2=b_0=1$ $b_1=40$.

A változók: $var1=$ fatörzsátmérő (cm), $var2=$ darabszám (db).

| | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|
| Model: $var2=b_3/exp((b_2*(var1-1*b_1))^2)+b_0$ (pelda2) | | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | | |
| Final loss: 47,132016006 R= ,99631 Variance explained: 99,264% | | | | |
| N=15 | b3 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 62,00369 | 0,119303 | 40,13033 | -3,50099 |

A $b_3+b_0=a$ legnagyobb darabszám, $b_1=a$ legnagyobb darabszámhoz tartozó átmérő.

3. Faanyagszárítás

A faanyag szárítási folyamata során nyert értékeket vizsgálja a feladat az idő függvényében. Az adatsor áttekintése vagy grafikus ábrázolása alapján eldönthető, hogy megfelelően transzformált tangens hiperbolikus görbe illesztése vezet helyes eredményre, és értelmezhető paraméterekhez.

A matematikai alak: $y = a \tanh(b(x - c)) + d$. Kezdőértékek: $b_3=b_2=b_0=1$ $b_1=15$.

A változók: $var1$ = az eltelt idő (óra), $var2$ = a nedvességtartalom (%).

| | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|
| Model: $var2=b_3*\tanh(b_2*(var1-1*b_1))+b_0$ (példa3) | | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | | |
| Final loss: ,718110358 R= ,99976 Variance explained: 99,952% | | | | |
| N=16 | b3 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | -11,8755 | 0,185932 | 14,02402 | 14,92063 |

A b_0-b_3 = a kezdeti nedvességtartalom (%), b_0+b_3 = a végső nedvességtartalom (%).

4. Anyaglehülés

A negyedik feladat az idő függvényében történő anyag lehülés értékeit tartalmazza. Az adatsor egyszerű áttekintése vagy esetleges grafikus ábrázolása alapján itt megállapítható, hogy a függvényillesztéshez egy megfelelően transzformált exponenciális („negatív exponenciális”) görbe alkalmazása lehet a legmegfelelőbb.

A matematikai alak: $y = \frac{a}{e^{b(x-c)}} + d$. Kezdőértékek: $b_3=b_2=b_1=b_0=1$.

A változók: $var1$ = idő (min), $var2$ = hőmérséklet (C°).

| | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|
| Model: $var2=b_3/\exp(b_2*(var1-1*b_1))+b_0$ (Spreadsheet4) | | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | | |
| Final loss: ,765464092 R= ,99984 Variance explained: 99,969% | | | | |
| N=15 | b3 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 14,92291 | 0,153119 | 7,191448 | 5,063373 |

A b_0 = a mért legalacsonyabb hőmérséklet (véghőmérséklet).

$b_3e^{(b_2b_1)} + b_0$ = a mért legmagasabb hőmérséklet (kezdőhőmérséklet).

5. Hangerő ingerérték

Az ötödik adatsor a hangerő függvényében észlelhető ingerértékek nyert elméleti adatait mutatja. A pontsor grafikus ábrázolása alapján logaritmikus függvény illesztése látszik legmegfelelőbbnek, ha az alkalmazott függvényt előzetesen megfelelően transzformáljuk, lehetővé téve az origóból való kiindulást a kezdő adatpár miatt.

A matematikai alak: $y = a \ln(b(x - c)) + d$. Kezdőértékek: $b_3=b_2=b_0=1$ $b_1=-1$.

A változók: $var1$ = hangerő (dB), $var2$ = ingerérték (i).

| | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|
| Model: $var2=b_3*\log(b_2*(var1-1*b_1))+b_0$ (Spreadsheet8) | | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | | |
| Final loss: ,001401137 R= ,99999 Variance explained: 99,998% | | | | |
| N=16 | b3 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 1,738903 | 1,539166 | -1,99920 | -1,95678 |

A b_0 = a mért legalacsonyabb ingerérték, $b_3 \ln(b_2(100 + b_1)) - b_0$ = a legmagasabb mért ingerérték.

6. Lövedékpálya

A hatodik adatsor egy kilőtt lövedék útjának adatait mutatja. A pontsor értékeinek áttekintése, a gyakorlati ismeretek és elemzés alapján könnyen megállapítható, hogy a görbeillesztésre parabola, másodfokú hatvány függvény a megfelelő, a szükséges transzformálással.

A matematikai alak: $y = a(x - b)^2 + c$. Kezdőértékek: $b_2 = -0,001$, $b_1 = 80$, $b_0 = 0,1$.

A változók: var1 = a vízszintesen mért távolság (m), var2 = a lövedék magassága.

| | | | |
|--|-----------|----------|----------|
| Model: $\text{var2} = b_2 * (\text{var1} - b_1)^2 + b_0$ (Spreadsheet12) | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | |
| Final loss: ,000808408 R= 1,0000 Variance explained: 99,999% | | | |
| N=15 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | -0,000802 | 99,89942 | 7,999709 |

A b_0 = a lövedék legnagyobb magassága, b_1 = az a távolság ahol a lövedék legmagasabban van, $b_0 - b_2 * b_1^2$ = a lövedék kiindulási magassága.

7. Lázgörbe

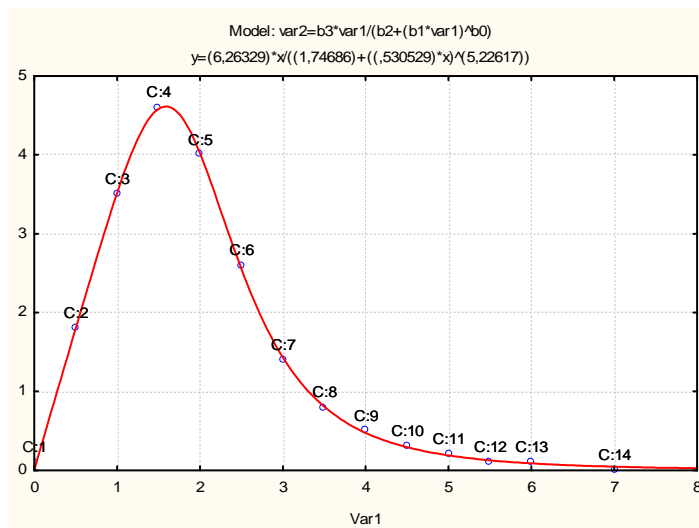
Az adatsor egy betegséggel együtt járó időbeli lázváltozás adatait mutatja (lázgörbe). Az adatsor elsődleges elemzése alapján transzformált Gauss-görbe alkalmazása látszik lehetségesnek. A grafikus ábrázolás azonban mutatja, hogy a görbe aszimmetrikus, hirtelen emelkedő és lassan csökkenő kellene, hogy legyen. Ezért a függvényillesztéshez egy speciálisan kialakított matematikai formulát szükséges alkalmazni.

A matematikai alak: $y = \frac{ax}{b + (cx)^d}$. Kezdőértékek: $b_3 = b_2 = b_1 = b_0 = 1$.

A változók: var1 = az idő (nap), var2 = hőmérséklet 36°C felett.

| | | | | |
|---|----------|----------|----------|----------|
| Model: $\text{var2} = b_3 * \text{var1} / (b_2 + (b_1 * \text{var1})^{b_0})$ (lázgörbe4p) | | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | | |
| Final loss: ,018167923 R= ,99973 Variance explained: 99,946% | | | | |
| N=14 | b3 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 6,263286 | 1,746860 | 0,530529 | 5,226167 |

A b_3/b_2 = a kezdő meredekség azaz, az egy nap alatti induló hőemelkedés értéke (betegség jellemző adat).



8. Napi levegő hőmérséklet

A nyolcadik adatsor egy 24 órás levegőhőmérséklet változás értékeit mutatja, éjfél-től-éjfélig. Az értékpárok elemzése és grafikus áttekintése itt jól mutatja, hogy megfelelően transzformált szinusz függvény alkalmazása a célszerű, ami a gyakorlati ismeretek alapján kézenfekvő.

A matematikai alak: $y = a \sin(b(x - c)) + d$. Kezdőértékek: $b_3=b_2=b_1=1$ $b_0=5$.

A változók: $\text{var1} = \text{idő (óra)}$, $\text{var2} = \text{a hőmérséklet (C}^\circ\text{)}$.

| | | | | |
|----------|--|-----------|----------|----------|
| | Model: $\text{var2}=b_3 \cdot \sin(b_2 \cdot (\text{var1}-1 \cdot b_1))+b_0$ (napihőingadozás) | | | |
| | Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | |
| | Final loss: ,014721151 R= ,99996 Variance explained: 99,992% | | | |
| N=13 | b3 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 5,199216 | -0,261772 | -3,00344 | 9,997983 |

A $b_0-b_3 = a$ legalacsonyabb, $b_0+b_3 = a$ legmagasabb hőmérséklet (C°) $b_1+6 = a$ legalacsonyabb, $b_1+6+12 = a$ legmagasabb hőmérséklet időpontja (óra).

9. Ötvözet vezetőképesség

A kilencedik adatsor egy olyan modellkísérlet adatait tartalmazza, ahol két fémből készült ötvözet vezetőképességének vizsgálata történt a százalékos összetétel függvényében. Az adatsor áttanulmányozása és grafikus elemzése alapján látható, hogy két határérték mutatkozik, azonban az ezek által meghatározott tartományon kívüli értékek is jelen vannak köztesen. Ez azt jelenti, hogy egyszerű klasszikus transzformált matematikai függvénnyel az illesztés nem látszik megoldhatónak. Ebből kiindulva, valamint a határértékek jelenléte miatt két különböző tangens hiperbolikus függvény megfelelően transzformált összege adhatja a jó regressziót.

A matematikai alak: $y = a \tanh(b(x - c)) + d \tanh(f(x - g)) + h$.

Kezdőértékek: $b_6=b_5=b_4=b_3=b_2=b_1=b_0=1$.

A változók: $\text{var1} = \text{a százalékos összetétel (\%)}$, $\text{var2} = \text{vezetőképesség (s/m } 10^6\text{)}$.

| | | | | | | | |
|--|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|
| Model: var2=b6*TanH(b5*(var1-1*b4))+b3*TanH(b2*(var1-1*b1)... (vezetőképesség) | | | | | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | | | | | |
| Final loss: ,000998882 R= ,99992 Variance explained: 99,984% | | | | | | | |
| N=21 | b6 | b5 | b4 | b3 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 0,334742 | 0,084865 | 67,62294 | -0,814370 | 0,081759 | 36,68642 | 2,097139 |

Ha $b_4 > b_1$ akkor $\frac{b_5 b_4 + b_2 b_1}{b_5 + b_2}$ = legkisebb vezetőképességhez tartozó %-os összetétel értéke.

var1=0 helyettesítéssel kiszámítható a 0%-hoz tartozó vezetőképesség értéke.

var1=100 helyettesítéssel kiszámítható a 100%-hoz tartozó vezetőképesség értéke.

10. Huzalfeszítés

A tizedik adatsor a huzal megnyújtás függvényében jelentkező feszítőerő adatpár sorát tartalmazza, azaz a huzalszakadás folyamatát jellemzi mért értékekkel. Az adatsor elemzése és grafikus áttanulmányozása alapján látható, hogy a kezdő és végső határérték egyforma (0), de a változás hirtelen mértékben aszimmetrikus. Ez azt jelenti, hogy klasszikus egyszerű transzformált matematikai függvénnyel az illesztés nem adódik megoldhatónak. Így következik, hogy bonyolultabb függvény kombináció használandó, jelen esetben is a két megfelelően transzformált tangens hiperbolikus függvény összege adhat várhatóan megbízhatóan jó regressziót 1-hez közeli korrelációs együtthatóval, és jól értelmezhető és értékelhető paraméterekkel.

A matematikai alak: $y = a \tanh(b(x - c)) + d \tanh(f(x - g)) + h$.

Kezdőértékek: $b_6=b_5=b_3=b_2=b_0=1$, $b_4=5$, $b_1=10$.

A változók: var1= a megnyújtás (mm), var2= a feszítő erő (N 10⁴).

| | | | | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Model: var2=b6*TanH(b5*(var1-1*b4))+b3*TanH(b2*(var1-1*b1)... (feszítőerő) | | | | | | | |
| Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | | | | | | |
| Final loss: ,000261920 R= 1,0000 Variance explained: 100,00% | | | | | | | |
| N=12 | b6 | b5 | b4 | b3 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 2,707871 | 0,591957 | 6,005157 | -2,70603 | 4,378056 | 11,23117 | -0,000973 |

Ha $b_4 > b_1$, akkor $z = \frac{b_5 b_4 + b_2 b_1}{b_5 + b_2}$ = a legnagyobb feszítő erőhöz tartozó megnyújtás (mm) értéke. $var2(z) = b_6 * \tanh(b_5 * (z - 1 * b_4)) + b_3 * \tanh(b_2 * (z - 1 * b_1)) + b_0 =$ a legnagyobb feszítő erő (a szakadást létrehozó erő).

11. Radioaktív sugárintenzitás

A tizenegyedik adatsor a radioaktív anyag idő függvényében észlelhető sugárintenzitásának értékeit tartalmazza. Az adott értékpár sorozat áttekintése alapján könnyen megállapítható, hogy egy negatív exponenciális függvény illesztése lehet a megfelelő. Mivel az ilyen jellegű vizsgálatoknál a felezési idő meghatározása is elemi követelmény, ezért a matematikai alak megfelelő transzformálása szükséges.

A matematikai alak: $y = \frac{a}{b(\frac{x}{c})}$ (vagy: $y = \frac{a}{2(\frac{x}{c})}$).

A változók: var1= az idő (hónap) var2= a sugárintenzitás (10⁶Bq).

Kezdőértékek: $b_2=1$, $b_1=b_0=2$ (módosított értékek).

| | | | |
|----------|--|----------|----------|
| | Model: $\text{var2} = b2/b1^{(\text{var1}/b0)}$ (felezési idő) | | |
| | Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2 | | |
| | Final loss: ,002096773 R= ,99998 Variance explained: 99,996% | | |
| N=11 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 7,993744 | 2,018864 | 2,931419 |

A megoldás akkor érvényes, ha $1,98 < b1 < 2,02$. Ekkor a felezési idő: $b0$, a kezdeti intenzitás $b2$.

12. Összefoglalás

A fentiekben bemutatásra került néhány növekedési görbe illesztése, melyek eredményeiből látható, hogy a számítógépes program használata sokszor igényel matematikai apparátust, itt konkrétan a kezdőértékek meghatározása. A további példák pedig azt mutatják, hogy a fizikailag értelmezhető paraméterű modell választása fontos, de ismerni kell hozzá a megfelelő függvénykompozíciót, annak additív esetleg multiplikatív esetét is.

A matematika és statisztika találkozási pontjai a Nyugat-magyarországi Egyetem Közgazdaságtudományi Karának oktatásában

Bischof Annamária

NymE KTK Innovatív Stratégiák Intézet

Hoschek Mónika

NymE KTK Innovatív Stratégiák Intézet

Egy közgazdász számára a matematika és a statisztika két olyan tudományterület, amelyet bár lehet, hogy nem szeret, de használni kénytelen. Az egyetemi oktatásban a Bologna-rendszer bevezetését követően – az átjárhatóság érdekében és az oktatási idő lerövidülése miatt – a tantárgyi egymásra épülések és a szigorlatok megszűntek.

Előadásunkban egyrészt bemutatjuk, hogy melyek azok a legfontosabb kapcsolódási pontok, ahol a Statisztika tárgyak oktatása során elkerülhetetlenül szükséges az egyetemi matematika tananyag ismerete és alkalmazása. Illetőleg, hogy milyen problémákkal szembesülünk amiatt, hogy az egyes tárgyakat annyi időre jegyzik csak meg a hallgatók, hogy éppen le tudjanak belőle vizsgázni.

1. A módszertani tárgyak képzési rendszere az NYME KTK-n

1.1. Hagyományos képzés

A Bologna-rendszer bevezetés előtt a klasszikus felbontással működött a közgazdász képzésben a módszertani tárgyak oktatása Sopronban is.

Az alapozó tárgyak egyike az első félévben a Matematika I. tárgy volt. Ennek keretében a komplex számok, polinomok, sorozatok, sorok, egy- és kétváltozós függvények differenciálszámítása és annak alkalmazásai témakörök lettek érintve.

A második félévre már csak akkor mehetett a hallgató, ha ezen témakörökből sikeres vizsgát tett. Ebben a félévben az integrálszámítás, a differenciálegyenletek és a lineáris algebra alapjai voltak az oktatott fejezetek.

A harmadik félévben a valószínűségszámítás legfontosabb témaköreivel ismerkedtek meg a hallgatók, a negyedik félévben pedig az operációkutatás válogatott területeivel foglalkoztak. Matematika oktatás tehát összesen négy félévben volt.

A statisztika oktatása a harmadik félévben kezdődött. Két félév általános statisztika (Statisztika I. és Statisztika II.) után egy félév gazdaságstatisztika következett. A gazdaságstatisztika már csak gyakorlati jegyes tárgy volt, mert a harmadik év első félévében módszertani szigorlatot kellett a hallgatóknak tennie.

A szigorlat összesen öt félévnyi anyagot ölelt fel: Valószínűségszámítás, Operációkutatás, Statisztika I. és II., valamint Gazdaságstatisztika.

1.2. Kétszintű képzés

Ez a „jól bevett” szisztéma alakult át a kétszintű képzés bevezetésével úgy, hogy a matematika oktatása két félévre csökkent, statisztikából pedig megszűnt a gazdaságstatisztika oktatása. Az egyes féléveken belüli óraszámok, és a statisztika oktatás kezdő időpontja pedig többször változtak: 2006 (az első alapképzési mátrix), 2007, 2009, 2012.

Az oktatási félévek és óraszámok drasztikus csökkenése következtében számos – a közgazdászképzésben fontos – témakört ki kellett venni a tananyagból. Így többek között nem tanítjuk ma már a végtelen sorokat, a differenciálegyenleteket, valószínűségszámításból több nevezetes eloszlást és a valószínűségi vektorváltozókat, valamint nagyon kevés idő jut a matematikai eszközök gazdasági alkalmazásainak bemutatására is.

A gyakorlatban is jól használható módszerek megismertetésének lehetőségét tovább csökkentette az a módosítás is, hogy 2007-es mintatantervtől kezdődően a Gazdaságstatisztika tárgy oktatása is megszűnt. A mesterképzésbe viszont nem kerültek be olyan mértékben matematika és statisztika jellegű tárgyak, amekkora mértékű csökkenés a hagyományos képzés – alapképzés relációban megfigyelhető volt.

2. A statisztika oktatásához szükséges matematikai alapok

Részben a fentebb leírt változtatások következtében, részben pedig a középfokú oktatásban végbement változások – melyekre most nem térnénk ki – következtében nagyon sok negatív tapasztalattal találkoztunk akkor, amikor a statisztika oktatása során a hallgatók már megszerzett matematika ismereteire szerettünk volna támaszkodni.

A következőkben összefoglaljuk, hogy az alapképzésben oktatott különböző statisztika témakörök – az alap számolási készségeken kívül – milyen matematikai megalapozást igényelnek/igényelnének. Ehhez kapcsolódóan egyúttal bepillantunk abba is, hogy hol milyen sarkalatos hiányosságokat találtunk.

2.1. Statisztika I.

| STATISZTIKA | MATEMATIKA |
|---|---|
| Leíró statisztika „alap” mutatószámai (átlag, módusz, medián, szórás) | Középiskolában az utóbbi években megjelent fejezet. De sajnos sok matematika tanár nem ismeri/alkalmazza azokat a módszereket – pl. munkatábla létrehozása – a mutatók meghatározásához, melyeket az egyetemi tananyagban használunk. |
| Diagramok készítése, értelmezése | Szintén középiskolából kell ismertnek lennie. Ott részben matematika órán hoznak létre és elemeznek különböző diagramokat, részben informatikából kell/kellene megtanulni Excelben a diagramok elkészítését. |
| Indexek, standardizálás | „Sima” és súlyozott számtani, mértani és harmonikus közép. Ezek közül gyakran ismeretlen a hallgatóknak a súlyozás és a harmonikus átlag fogalma. |

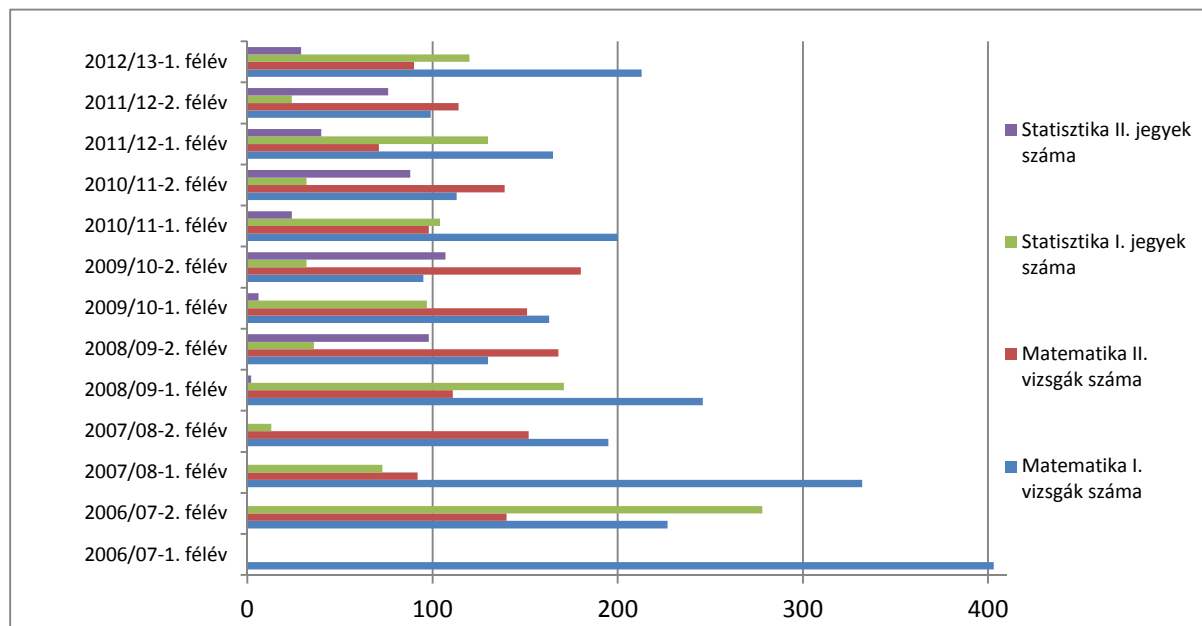
2.2. Statisztika II.

| STATISZTIKA | MATEMATIKA |
|-------------------------------------|--|
| Becslés, hipotézisvizsgálat | Szükséges lenne a nevezetes eloszlások (normális, khi-négyzet, t, f, egyenletes) ismerete. Azonban a matematika órákon – az idő rövidege miatt – a folytonos eloszlások közül csak a normális/standard normális eloszlásokat tárgyaljuk. Így a többi eloszlás teljesen ismeretlen a hallgatók előtt. Ezen kívül általában nem kerül sor matematikából olyan feladatok gyakorlására, ahol „visszafelé” gondolkozva, konfidencia intervallumot kell felépíteni. A valószínűségi vektorváltozók pedig teljesen kikerült a tananyagból. Így a kontingencia tábla, peremgyakoriságok, peremeloszlások, függetlenség ismeretlen fogalmak. |
| Kétváltozós korrelációs számítás | Matematika I.-ből jövő ismeret a kovariancia fogalma és kiszámítási módja. |
| Kétváltozós lineáris regresszió | Matematika I.: Regressziós egyenes paramétereinek levezetése – legkisebb négyzetek módszere, a paraméterek értelmezése. Ehhez kapcsolódóan a kétváltozós függvények szélsőértékszámítása. „Kézi” számolásnál középiskolai alapként egyenletrendszer megoldási módszereinek ismerete szükséges. Elasticitás függvény és elasticitás értékének fogalma, ill. számolása bármely differenciálható függvényre értelmezési tartományának tetszőleges pontjában. |
| Nemlineáris regresszió | Középiskolából: Szükséges különböző nevezetes függvények (hiperbolikus, exponenciális, hatványkitevős) és a levezetésekhez a logaritmus definíciójának és tulajdonságainak ismerete. |
| Többváltozós regressziószámítás | Matematika I-II.: Koordinátagéometriából, függvénytanból ismertnek kell lennie a többváltozós lineáris függvény egyenletének. A szükséges számítások elvégzéséhez elengedhetetlen a mátrixok, vektorok fogalma, összeadása, szorzása, inverz meghatározása az $\text{adj}(A)/\det(A)$ képlettel, vagy más módon. Lineáris egyenletrendszer megoldása inverz mátrixszal való szorzás segítségével. Többváltozós függvények szélsőérték számítási ismeretei. A regresszió paramétereinek értelmezéséhez alapvető függvénytan ismeretek szükségesek. |

3. Összefüggések a hallgatók matematika és statisztika eredményei között

A 2006/07-es tanév első félévétől a jelenlegi, 2012/13-as tanév első félévéig összesen 5667 jegyet szerzett Matematika I. és II., illetve Statisztika I. és II. tantárgyból a vizsgált 845 hallgató. Ez félévente átlagosan 436 jegyet jelent. (Bár mindkét statisztika tárgy gyakorlati jegyes, a továbbiakban az egyszerűség kedvéért ott is vizsgának tekintjük a jegy megszerzését.) Amennyiben tantárgyakra lebontva nézzük (lásd 1. ábra) látható, hogy

majdnem minden félévben a Matematika I. tárgyból volt a legnagyobb a vizsgákon való részvétel-szám. Szintén jól megfigyelhető, hogy a tárgyak előírt félévében a vizsgák száma jelentősen magasabb, mint a „keresztfélévekben”.



1. ábra: Vizsgák és megszerzett gyakorlati jegyek száma tárgyankénti és félévenkénti bontásban.

Amennyiben hallgatóink eredményességét vizsgáljuk, azt kell mondanunk, hogy mind az elégtelenek figyelembevételével számított vizsgaátlagoknál (2. ábra), mind a sikeres vizsgák átlagainál (3. ábra) igaz, hogy a leggyengébb eredmények a Matematika I. tárgynál születtek. Ezt követi a Matematika II., majd a Statisztika I. és a legjobb eredményeket minden félévben Statisztika II.-ből érték el. A féléves egy hallgatóra jutó vizsgaszám ugyanakkor éppen fordított sorrendű, azaz legkevesebb a Statisztika II. és legtöbb a Matematika I. esetében.

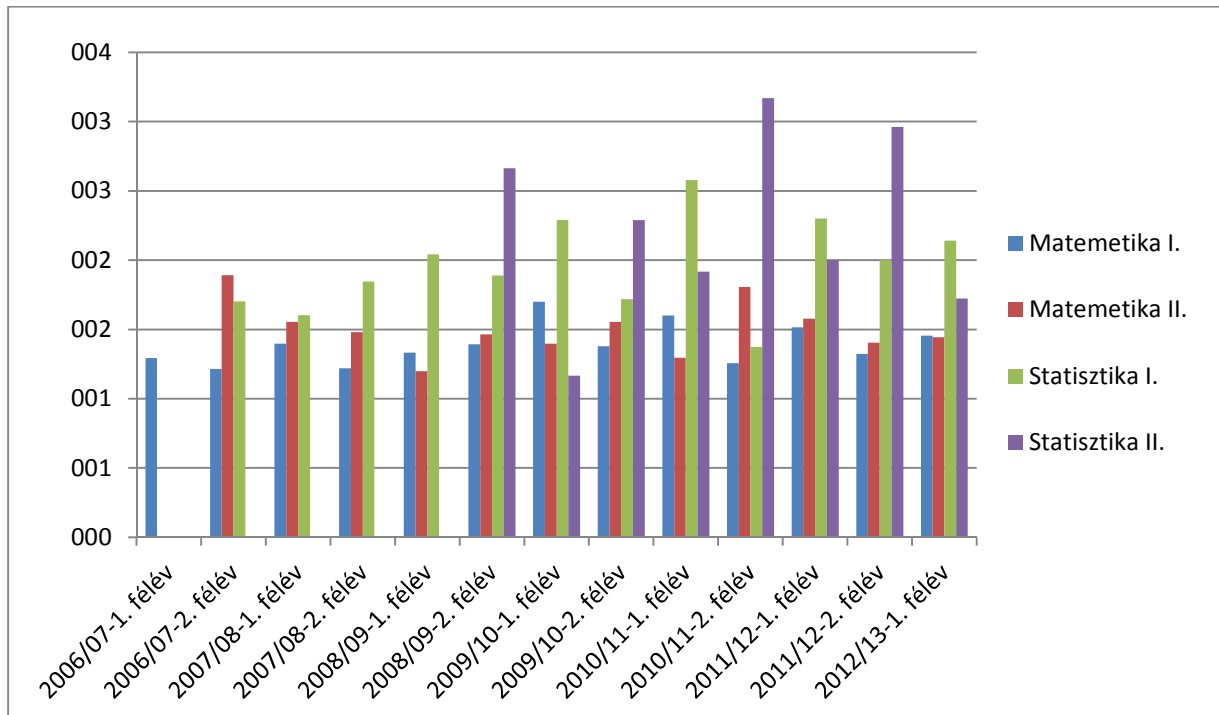
Megvizsgáltuk az egyes tárgyak közötti összefüggést. A vizsgálat során olyan hallgatók eredményeit vettük ki a sokaságból, akik mindkét éppen vizsgált tárgyból már rendelkeztek érdemjeggyel.

Először a két matematika tárgy közötti összefüggést néztük meg. Mind a hipotézisvizsgálat, mind pedig a varianciaanalízis is alátámasztotta, hogy két tárgy eredményeire felírható lineáris összefüggés, melynek értelmében a Matematika I.-en elért egy egész jegyes emelkedés a Matematika II. esetében átlagosan 0,47 jegyes emelkedést okoz. A kapcsolat szorosságára 0,43-t kaptunk, ami közepes kapcsolatot mutat.

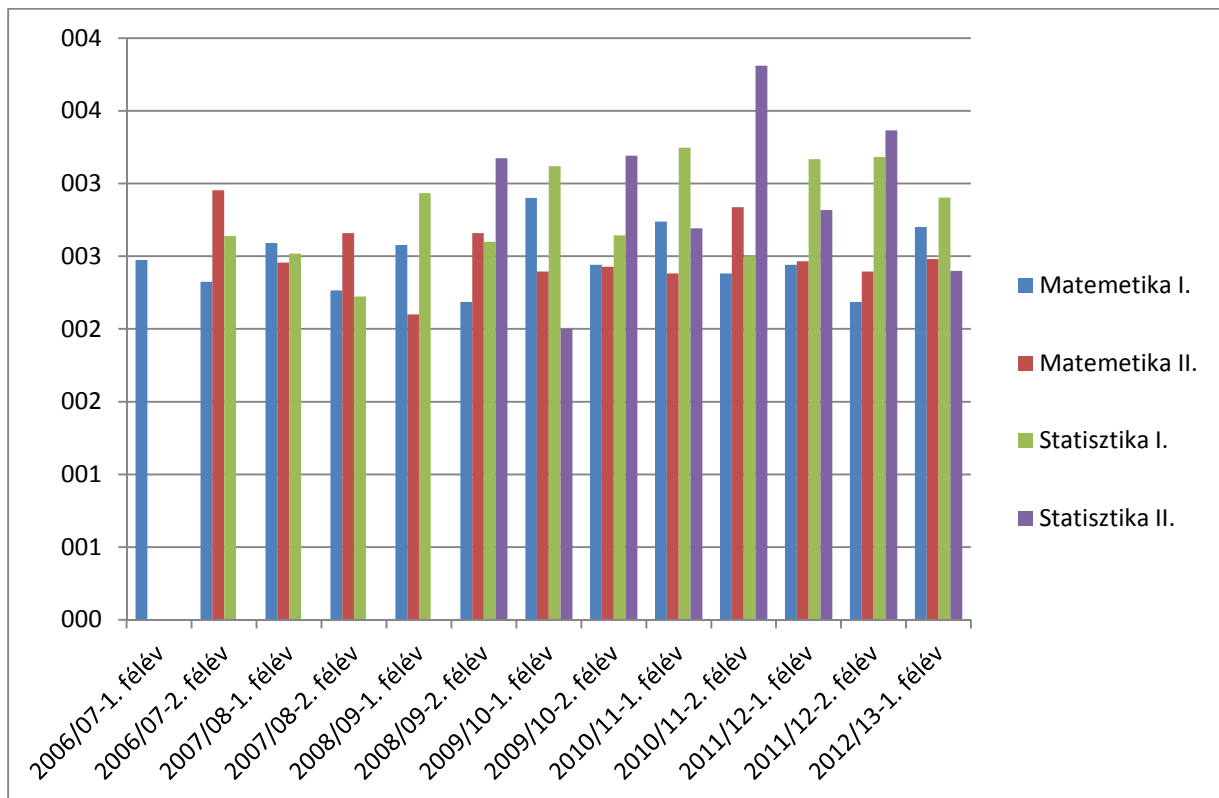
A statisztika két tárgya között elvégezve ugyanezeket a vizsgálatokat azt láttuk, hogy itt is található szignifikáns lineáris kapcsolat a jegyek között. Egy jegy javulás a Statisztika I. gyakorlati jegynél 0,65 jegyet jelent a Statisztika II.-nél. A kapcsolat a tárgyak között valamivel nagyobb, mint a matematikák esetében, de még mindig csak közepesnek mondható (0,57).

A matematika és statisztika tárgyak közötti kapcsolatot két módon is megvizsgáltuk. Először a Matematika I. és Statisztika I. esetében néztük meg ugyanazokat a mutatókat, mint korábban. Ebben a tárgypárosításban is kimutatható a kapcsolat, mely azt a korábban említettek közötti közepes szorosságot mutat (0,46). Másodjára a matematika jegyekből képeztünk egy matematika átlagot, majd a statisztika jegyekből egy statisztika átlagot. Ezen átlagos mutatók között is közepes kapcsolat mutatkozott (0,52), ám ami érdekes, hogy itt volt

az egy jegyes emelkedésnek a legnagyobb hatása. Azaz a matematika átlag egy jegyek történő emelése 0,71 jegyes emelkedést eredményezett az adott hallgató statisztika átlagában.



2.ábra: Elégtelenek figyelembevételével számított vizsgaátlagok tárgyanként és félévenként



3.ábra: Sikeres vizsgák átlagai tárgyanként és félévenként

(Természetesen ennél a vizsgálatnál már csak azon hallgatók eredményeit tudtuk csak figyelembe venni, akik mind a négy tárgyat már abszolválták, azaz rendelkeznek elégtelennél jobb jeggyel.)

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetünket kifejezni Árendásné Fekete Mártának, az NYME KTK főtanácsosának az elemzésekhez, kimutatásokhoz szükséges adatok Neptun rendszerből való kigyűjtéséért.

Irodalomjegyzék

- [1] Rappai Gábor (2001): Üzleti statisztika Excellel – Statisztikai módszerek a társadalmi és gazdasági elemzésekben. KSH, Budapest.
- [2] Kerékyártó Györgyné – Mundruczó György – Sugár András (2003): Statisztikai módszerek és alkalmazásuk a gazdasági, üzleti elemzésekben. AULA Kiadó, Budapest
- [3] Závoti József – Hoschek Mónika – Bischof Annamária (2011): Statisztikai módszerek és táblázatok. NYME Kiadó, Sopron, ISBN 978-963-334-334-019-6

„Átmenet” a középiskola és az egyetem között egy matematika tanár szemével

Nagy Zsolt

NymE Roth Gyula Gyakorló SZKI és Kollégium

Először szeretném bemutatni az iskolánkban folyó matematika oktatást. Iskolám az NymE Roth Gyula Gyakorló SZKI és Kollégium. A matematika oktatás felépítése jelenleg kifutó rendszerben 4+3+3+4 óra, amelyhez 9. és 10. osztályban plusz egy óra korrepetálás segíti a felzárkózást, a kb. egy szintre való hozást. Az utolsó két évben csoportbontásban oktatunk. A tanulók szétválogatásánál próbálunk odafigyelni, hogy ez a képesség szerint, illetve a továbbtanulási szándékok szerint történjen. Ezekon az évfolyamokon már nincs korrepetálás, helyette a plusz órát a „jobbik” csoportok kapják a tananyag mélyebb elsajátításához.

Az új kerettanterv szerint, ami 2013 szeptemberében kerül bevezetésre 9. évfolyamon felmenő rendszerben, az óraszám a következőképpen alakul: 4+3+3+3(!). Az óraszámot tovább csökkentve a szakközépiskolai tanulók továbbtanulási esélyeit tovább rontotta az oktatási kormányzat. Ugyanis a szakirányú továbbtanuláshoz elengedhetetlen matematikából az emeltszintű érettségi megléte. Ez komoly felelősséggel jár az iskola irányában, mert meg kell oldanunk, hogy tanulóink ne induljanak hátránnyal a felvételin. Ezt csak felkészítők indításával lehet megoldani.

Jelenleg a szakképző (13. és 14.) évfolyamokon egyáltalán nincs matematika oktatás, még szakkör szintjén sem! Így a kikerülő tanulók óriási lemaradással indulnak a felsőoktatásban. Ennek elsősorban finansiális okai vannak, míg el nem hanyagolható tényező a tanulók érdektelensége sem... Csak későn kapnak észbe, amikor sok esetben már nincs mit tenni. Az új szakképzési törvény részben segít ezen a gondon, mert visszaállítja az öt éves szakképzést, bár nem a régi (2005-ig volt), jól bevált rendszert hozták vissza. Sajnos a közismereti órák számát csökkentették. Csak remélni tudom, hogy ez nem fog meglátszani a továbbtanulási arányon, bár ezzel még várni kell legalább öt évet... .

Iskolánkban a Mozaik Kiadó Sokszínű Matematika tankönyvcsaládját tanítjuk. Természetesen más kiadók tankönyveit is ismerjük. Ezért nyugodtan mondhatom gyakorló tanárként, hogy igazán jó, használható, minden igényt kielégítő tankönyv nincs most az oktatási rendszerben.

1. A matematika tanulás legfontosabb összetevői:

Matematikai kompetencia

- matematikai képesség
- műveleti szakasz megismerése
- matematikai tanulmányok előélete
- kommunikációs készség

Matematikához való hozzáállás

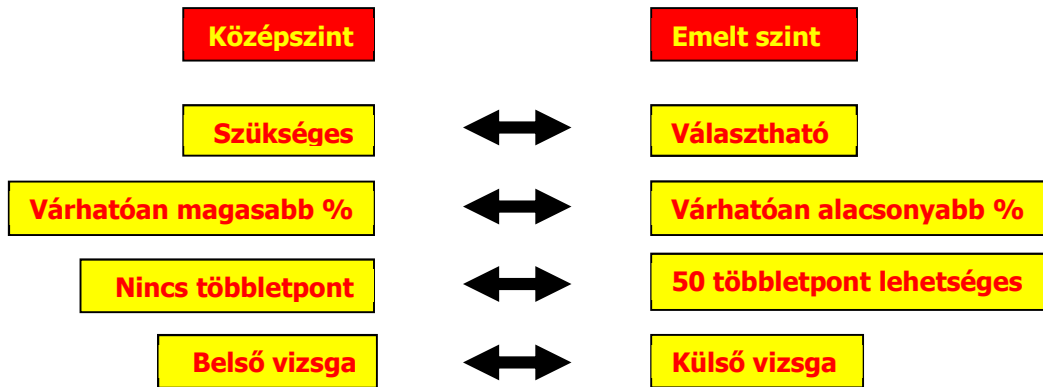
- motiváció, önbizalom

A tanulás módja

- stílus, tanulási stratégiák

Úgy gondolom, hogy a képesség kivételével minden fejleszhető lenne nemcsak a középiskolában, hanem még az egyetemen is. Legfontosabb lenne a hozzáálláson való javítás. Valamint megtanítani a tanulókkal, hallgatókkal a helyes tanulási stílust, módszereket, stratégiákat.

2. Az érettségi szintválasztás dilemmája



1. ábra

A Vizsgaszabályzat módosításában az érettségi vizsgák eredményes/elégséges letételéhez szükséges határt 20%-ról 25%-ra megemelték, közép- és emelt szinten egyaránt!

Középszintű érettséggel rendelkező hallgató esélyei elég csekélyek, sok alapvető hiányossággal rendelkezik. Emiatt sok energiát kell befektetnie a tanulásba.

Emeltszintű érettséggel már nagyobb eséllyel indul, bár itt is vannak hiányosságok.

- Az emelt szintű érettségi jóval nehezebb a középszintűnél,
- de alacsonyabb % határtól lehet érte jobb jegyet kapni
- és tantárgyanként (max. 2) +50 pontot jár érte, ha az legalább 50%-os, és annak alapján számolják ki a felsőoktatási intézmények a jelentkező szerzett pontját.

3. Két feladat az emelt szintű írásbeli érettségiről

1. Egy meghibásodott katonai műhold mozgását egy órán keresztül akarták figyelni a szakemberek. A műhold Földtől való távolságát a megfigyelés kezdetétől az alábbi $f(x)$ függvény írja le (az egység az x tengelyen: 6 perc, az y tengelyen 1500 méter):

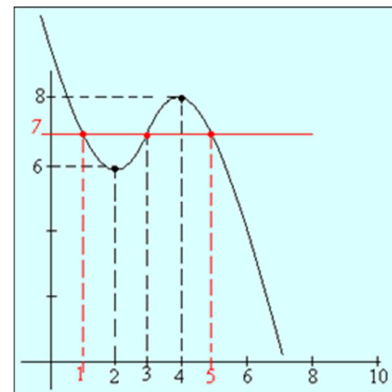
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 10, & \text{ha } x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 8, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

a) Milyen magasan volt a műhold a megfigyelés kezdetekor?

b) Egy radar minden olyan tárgyat észlel, mely a földtől legfeljebb 10,5 km távolságra van. Mikor észlelte ez a radar a műholdat?

Megoldás:

Átalakítva, teljes négyzetté alakítva a függvény hozzárendelési szabályát, ábrázolva a függvényt (2. ábra):



2. ábra

$$x^2 - 4x + 10 = (x - 2)^2 + 6$$

$$-x^2 + 8x - 8 = -(x - 4)^2 + 8$$

Kiszámolva a kezdeti értéket: $f(0) = (0 - 2)^2 + 6 = 10$.

Tehát $10 \cdot 1500 = 15000$ m magasan volt a mérés kezdetén.

Átváltva a magasságot: $\frac{10500}{1500} \rightarrow y = 7$, tehát a grafikonról leolvastva: $1 \leq x \leq 3$ vagy $5 \leq x$,

azaz 6 és 18perc között, valamint a 30.perc után érzékeli a radar.

2. A PQRS négyszög csúcsai: P(3; -1), Q(1; 3), R(-6; 2) és S(-5; -5). Döntse el, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz és melyik hamis!

A PQRS négyszögnek nincs derékszög.

A PQRS négyszög húrnégyszög.

A PQRS négyszögnek nincs szimmetria-centruma.

Megoldás:

Ábrázolva (3. ábra) a pontokat koordináta-rendszerben:

Felírhatjuk az egyes oldal vektorokat:

$$\vec{v}_{RS}(1; -7)$$

$$\vec{v}_{RQ}(7; 1)$$

$$\vec{v}_{PQ}(-2; 4)$$

$$\vec{v}_{PS}(-8; -4)$$

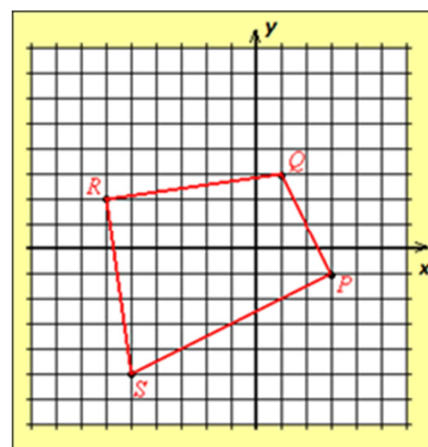
Felírva a két szomszédos oldalvektorok skaláris szorzatát, kapjuk, hogy:

$$\vec{v}_{PS} \cdot \vec{v}_{PQ} = 16 - 16 = 0, \text{ illetve } \vec{v}_{RS} \cdot \vec{v}_{RQ} = 7 - 7 = 0$$

Tehát a négyszögnek van derékszög, és húrnégyszög, mert szemközti szögeinek összege 180° .

Felírva a két szemközti csúcsok által meghatározott szakasz felezőpontjait: $F_{SQ}(-2; -1)$,

illetve $F_{RP}\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Tehát nincs szimmetriacentruma.



3. ábra

4. Két feladat az emelt szintű szóbeli érettségiről

1. Hány olyan ötjegyű pozitív szám van, amely osztható 3-mal és 6-ra végződik?

Megoldás:

Az ötjegyű számok közül a 10026 a legelső megfelelő. 10056 a következő, tehát 30-anként követik egymást. Így egy számtani sorozatot kapunk, melyben $a_1 = 10026$, illetve $d = 30$.

Az általános tagot felírva: $a_n = a_1 + (n-1)d = 10026 + (n-1)30 < 100000$.

Mivel n természetes szám, ezért $n = \left\lceil \frac{100000 - 10026}{30} + 1 \right\rceil = 3000$ db ilyen szám létezik.

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x}{2} = \sin 2x$!

Megoldás:

Átalakítva az egyenletet:

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}{2} = \sin 2x$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \sin 2x$$

$$\frac{1}{\sin 2x} = \sin 2x$$

$$\sin 2x = 1 \quad \text{vagy} \quad \sin 2x = -1$$

Így kapjuk a megoldásokat: $x = \pm \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Már tizenhét hivatalos emelt szintű érettségi zajlott le, s az ezeken kitűzött feladatokat vizsgálva (lásd. a fenti két példa) sajnos olyan egyszerű, már-már típusfeladatként is a könnyebbik fajtából való problémákkal kellett szembenéznük a diákoknak, melyek néhány évvel ezelőtt (a témaköröktől eltekintve) legfeljebb a hagyományos "normál" érettségien szerepelhettek volna, a közös érettségi-felvételin ilyen feladat szóba sem jöhetett!

A szóbeli alkalmával sok szépen felkészült vizsgázóval találkoztam, akik ezek az egyszerű feladatokat rutinszerűen oldották meg. De sajnos sok olyan vizsgázó is volt, aki nem tudott ezekkel a problémákkal megküzdni. Az emelt szintű vizsga megkövetelése pedig óhatatlanul magával hozza a tömegesítést, és a mezőny további „hígulását”!

Vajon hová vezethet az a folyamat, az az út, melyen elindultunk a matematika szűkített tananyagát és az újfajta követelmény-rendszert tekintve? Szerintem nem sok jóra.

Sokszor tapasztaljuk, miszerint az idei első éves hallgatók – akiknek fő vagy alapozó tárgya a matematika – körében a vizsgaidőszakban a bukottak aránya többszöröse annak, mint amit a korábbi években megszoktunk. Az arány pedig egyre csak romlik.

Néhány tipikus probléma az egyetemi matematika gyakorlatokról:

- Miért változik az előjel? $\left| \frac{6}{3-n^2} \right| < 0,01 \stackrel{?}{\Rightarrow} \frac{6}{n^2-3} < 0,01$ Abszolút értékes egyenlőtlenséget sok hallgató képtelen megoldani.
- Elemi függvények ábrázolása nagyon sokuknál okoz gondot, nem ismerik őket!
- Trigonometrikus összefüggések használatával nincsenek tisztában. Ez ugyan közép szinten nem követelmény, de emelt szinten is sok helyen csak érintőlegesen tanítják, megmaradnak a $\sin 2x$ és $\cos 2x$ tanításánál.
- Algebrai nevezetes szorzatok használata
- Valószínűség fogalmával egyáltalán nincsenek, vagy csak részben vannak tisztában, gondolkodás nélkül leírják végeredményül: $P(A) > 1$!

Ezeket a problémákat csak nagyon sok gyakorlással, felzárkóztatással tudunk segíteni. Továbbra is célszerű szintfelmérőt íratni a bekerülő középiskolásokkal, és a szintet el nem érőket kötelezni egy alapozó tárgy felvételére, ami előfeltétele lenne az egyetemi matematika tanulásának.

A 3D, 7-paraméteres dátum transzformáció megoldása Gröbner-bázisban és a Bursa-Wolf modellben

Kalmár János - Závoti József
MTA CSFK GGI

A számítástechnika fejlődése hozta magával, hogy az alkalmazott matematika érdeklődésének középpontjába a számítógépes algebrai rendszerek (CAS) kutatása és alkalmazása került. Az előadásban a térbeli hasonlósági transzformáció nemlineáris feladatának megoldására mutatunk be két modellt.

Az első modell a 7 paraméteres, 3D transzformációs feladatot a Gauss-Jacobi féle kombinatorikus kiegyenlítéssel oldja meg Gröbner bázison alapuló algebrai technikával.

Az előadás második része a kvaterniók alkalmazását mutatja be a forgatás, az eltolás és a méretarány paraméterek meghatározására a Bursa-Wolf dátum transzformációs modellben. Mindkét algoritmusnak előnye az, hogy nemcsak 0 közeli szögelfordulások esetén alkalmazható, továbbá nincs szükség linearizálásra és iterációra a transzformációs paraméterek számításához.

1. Bevezetés

A koordináta-rendszerek közötti áttérés során kiemelkedő jelentőségű a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformáció alkalmazása, ez a legelterjedtebb módszer a GPS rendszerek közötti átszámítások elvégzésében. A gyakorlatban használatos eljárások általában közelítő, iterációs megoldásokat használnak. A dátum transzformáció probléma újszerű tárgyalását *Awange és Grafarend (2002)* és *(2003)* cikkei vezették be. Ötletük alapján az R forgatási mátrixot egy ferdén szimmetrikus mátrix segítségével írták fel. *Závoti (2005)* tanulmánya javította a modellt, *Závoti és Jancsó (2006)* cikke pedig továbbfejlesztette a szakirodalomban ismert algoritmust. A *Závoti (1999)* publikáció a 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció L_1 normás megoldását tárgyalja. A számítógéppel támogatott algebrai rendszerek elterjedésével megjelentek egzakt, analitikus megoldást adó modellek. Ezeknek a modelleknek gyakorlati használatát az akadályozza, hogy az átszámításhoz használt közös pontok számának növekedésével kombinatorikus robbanás lép fel, azaz a feladat a számítástechnika mai állása mellett sem oldható meg valós időben.

A feladat ezen tanulmányban ismertett nemlineáris megoldása során az egyenleteket nem kell linearizálni, nem szükséges iterálni és a két koordináta-rendszer (lokális-globális referencia rendszer) kovariancia kapcsolatai automatikusan felhasználásra kerülnek. A tanulmány ismerteti a Gauss-Jacobi kombinatorikus algoritmus matematikai elméletét, a túlhatározott 3D, 7 paraméteres transzformáció megoldását.

2. Gauss-Jacobi kombinatorikus modell

A 3D, 7-paraméteres (Helmert) hasonlósági transzformáció a következő modellel adható meg: a transzformáció (X, Y, Z) -tárgyponti és az (x, y, z) -célponti koordináta-rendszer közötti

Euklidészi térben adott pontok között valósít meg leképezést az eltolási-, az elforgatási és a méretarány-tényező függvényében:

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = sR \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad i=1, 2, 3, \dots, n. \quad (1)$$

ahol

- $\{a_i, b_i, c_i\}$ és $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$) ugyanazon a pont koordinátái a két koordináta rendszerben,
- s az ismeretlen méretarány tényező,
- X_0, Y_0 és Z_0 az ismeretlen eltolási értékek,
- R a forgatási mátrix.

Az R forgatási mátrix a három koordináta tengely körüli elforgatással, azaz ω, φ és κ , három független paraméterrel írható le:

$$R = R_1(\omega)R_2(\varphi)R_3(\kappa). \quad (2)$$

Az R forgatási mátrixot az S ferdén szimmetrikus mátrix bevezetésével a következő módon írjuk fel:

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S), \quad (3)$$

ahol I_3 a három dimenziós egységmátrix, és S mátrix az a, b és c paraméterekkel az alábbi formában adható meg:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

A 7 paraméter meghatározásához legalább 7 egyenlet felírására van szükség. Amennyiben 3 pontot tekintünk adottnak, az (1) formula felhasználásával 9 egyenletet tudunk felírni, így feladatunk túlhatározottá válik. A következő egyenletek a 3 pont koordinátáinak (1) összefüggésbe történő helyettesítésével adódnak:

$$\begin{aligned} f_1 &:= sX_1 - scY_1 + sbZ_1 + X_0 + cY_0 - bZ_0 - a_1 - cb_1 + bc_1 = 0 \\ f_2 &:= scX_1 + sY_1 - saZ_1 - cX_0 + Y_0 + aZ_0 + ca_1 - b_1 - ac_1 = 0 \\ f_3 &:= -sbX_1 + saY_1 + sZ_1 + bX_0 - aY_0 + Z_0 - ba_1 + ab_1 - c_1 = 0 \\ f_4 &:= sX_2 - scY_2 + sbZ_2 + X_0 + cY_0 - bZ_0 - a_2 - cb_2 + bc_2 = 0 \\ f_5 &:= scX_2 + sY_2 - saZ_2 - cX_0 + Y_0 + aZ_0 + ca_2 - b_2 - ac_2 = 0 \\ f_6 &:= -sbX_2 + saY_2 + sZ_2 + bX_0 - aY_0 + Z_0 - ba_2 + ab_2 - c_2 = 0 \\ f_7 &:= sX_3 - scY_3 + sbZ_3 + X_0 + cY_0 - bZ_0 - a_3 - cb_3 + bc_3 = 0 \\ f_8 &:= scX_3 + sY_3 - saZ_3 - cX_0 + Y_0 + aZ_0 + ca_3 - b_3 - ac_3 = 0 \\ f_9 &:= -sbX_3 + saY_3 + sZ_3 + bX_0 - aY_0 + Z_0 - ba_3 + ab_3 - c_3 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

A fenti 9 egyenletből álló egyenletrendszer a 7 ismeretlen paraméterben nemlineáris és túlhatározott.

Az egyenletrendszer egyértelmű megoldásához az (5) egyenletekből kiválasztunk 7 egyenletet, például elhagyjuk a 7. és 8. egyenleteket:

$$\begin{aligned}
f_1 &:= sX_1 - scY_1 + sbZ_1 + X_0 + cY_0 - bZ_0 - a_1 - cb_1 + bc_1 = 0 \\
f_2 &:= scX_1 + sY_1 - saZ_1 - cX_0 + Y_0 + aZ_0 + ca_1 - b_1 - ac_1 = 0 \\
f_3 &:= -sbX_1 + saY_1 + sZ_1 + bX_0 - aY_0 + Z_0 - ba_1 + ab_1 - c_1 = 0 \\
f_4 &:= sX_2 - scY_2 + sbZ_2 + X_0 + cY_0 - bZ_0 - a_2 - cb_2 + bc_2 = 0 \\
f_5 &:= scX_2 + sY_2 - saZ_2 - cX_0 + Y_0 + aZ_0 + ca_2 - b_2 - ac_2 = 0 \\
f_6 &:= -sbX_2 + saY_2 + sZ_2 + bX_0 - aY_0 + Z_0 - ba_2 + ab_2 - c_2 = 0 \\
f_9 &:= -sbX_3 + saY_3 + sZ_3 + bX_0 - aY_0 + Z_0 - ba_3 + ab_3 - c_3 = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Ha a megoldás előállítására az Awange és Grafarend (2002) által ajánlott Gröbner-bázis módszerét használjuk, akkor a bázis minden egyes kombinációjával számolnunk kell. A kiválasztást a kombinatorikus megoldás során minden lehetséges módon el kell végezni. Ezt a kiválasztást a sorrend fegyelmen kívül hagyásával $\binom{9}{7} = 36$ különböző kombinációban tudjuk megtenni. A 7 egyenletet mind a 36 esetben meg kell oldani mind a hét paraméterre, és rendre a megoldások súlyozott átlagát kell számolni.

Ha csak 3 közös pont van, nincs komoly akadálya annak, hogy kiszámítsuk a 36 különböző Gröbner-bázist, de ha 4 vagy több pont van, a feladat megoldása egyre nehezebbé válik. Például, ha 4 közös pont van, akkor a kombinációk száma 792. Ez azt jelenti, hogy 792 Gröbner-bázist kell meghatározni, és azokkal számolni. Ha 5 adott pont van, akkor a kombinációk száma 6435, a pontok számának növekedésével kombinatorikus robbanás lép fel, a feladat megoldhatatlanná válik.

Az (1) összefüggésben szereplő eltolási paraméterek kiküszöböléséhez képezzük a következő különbségeket:

$$\begin{aligned}
f_{14} &:= f_1 - f_4 = sX_{12} - scY_{12} + sbZ_{12} - a_{12} - cb_{12} + bc_{12} = 0 \\
f_{25} &:= f_2 - f_5 = scX_{12} + sY_{12} - saZ_{12} + ca_{12} - b_{12} - ac_{12} = 0 \\
f_{39} &:= f_3 - f_9 = -sbX_{13} + saY_{13} + sZ_{13} - ba_{13} + ab_{13} - c_{13} = 0 \\
f_{69} &:= f_6 - f_9 = -sbX_{23} + saY_{23} + sZ_{23} - ba_{23} + ab_{23} - c_{23} = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

ahol

$$\begin{aligned}
X_{ij} &= X_i - X_j, Y_{ij} = Y_i - Y_j, Z_{ij} = Z_i - Z_j, & i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j, \\
a_{ij} &= a_i - a_j, b_{ij} = b_i - b_j, c_{ij} = c_i - c_j.
\end{aligned}$$

3. A 7 paraméteres 3D transzformáció megoldása

A (7) összefüggésben adott nemlineáris egyenletrendszer megoldásához valamilyen külső programot kell használnunk, mint például a MATLAB vagy a Mathematica.

A fenti nemlineáris egyenletrendszer megoldását az Awange és Grafarend (2002) tanulmány a Gröbner bázis felhasználásával hajtotta végre. A méretarány-tényező meghatározására egy negyed-fokú polinom-egyenletet kaptak. A negyed-fokú polinom gyökeit a MATLAB programcsomag segítségével is megkaphatjuk. Az alábbi negyed-fokú polinom legkisebb pozitív gyöke szolgáltatja a méretarány-tényezőt:

$$d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s^1 + d_0 = 0, \tag{8}$$

ahol a polinom együtthatói a két koordináta-rendszerben adott pontok koordinátái által meghatározott bonyolult függvényei a Gröbner bázisban. Megjegyzendő, hogy a negyedfokú egyenlet megoldása után még külön probléma a gyökök szétválasztása, a négy gyök közül a megfelelő méretarány-tényező kiválasztása.

A rekonstruálhatóság érdekében megadjuk a negyed-fokú polinom együtthatóit:

$$d_4 = X_{13} * Y_{12} * Y_{12} * Y_{23} + X_{12} * X_{12} * X_{13} * Y_{23} - X_{12} * X_{12} * X_{23} * Y_{13} - X_{12} * Y_{13} * Z_{12} * Z_{23} - X_{23} * Y_{12} * Y_{12} * Y_{13} + X_{13} * Y_{12} * Z_{12} * Z_{23} - X_{23} * Y_{12} * Z_{12} * Z_{13} + X_{12} * Y_{23} * Z_{12} * Z_{13} \quad (9)$$

$$d_3 = c_{12} * X_{13} * Y_{12} * Z_{23} - b_{13} * X_{12} * Z_{12} * Z_{23} - c_{13} * X_{12} * Y_{23} * Z_{12} + b_{23} * X_{13} * Y_{12} * Y_{12} - a_{23} * X_{12} * X_{12} * Y_{13} + c_{23} * X_{12} * Y_{13} * Z_{12} + c_{12} * X_{12} * Y_{23} * Z_{13} + a_{13} * Y_{12} * Y_{12} * Y_{23} - b_{12} * X_{23} * Z_{12} * Z_{13} - a_{23} * Y_{12} * Y_{12} * Y_{13} + b_{12} * X_{13} * Z_{12} * Z_{23} - c_{12} * X_{12} * Y_{13} * Z_{23} + a_{13} * X_{12} * X_{12} * Y_{23} - c_{23} * X_{13} * Y_{12} * Z_{12} - a_{23} * Y_{12} * Z_{12} * Z_{13} + c_{13} * X_{23} * Y_{12} * Z_{12} - b_{13} * X_{23} * Y_{12} * Y_{12} - b_{13} * X_{12} * X_{12} * X_{23} + b_{23} * X_{12} * Z_{12} * Z_{13} + a_{13} * Y_{12} * Z_{12} * Z_{23} + b_{23} * X_{12} * X_{12} * X_{13} + a_{12} * Y_{23} * Z_{12} * Z_{13} - a_{12} * Y_{13} * Z_{12} * Z_{23} - c_{12} * X_{23} * Y_{12} * Z_{13} \quad (10)$$

$$d_2 = a_{13} * b_{23} * X_{12} * X_{12} + b_{12} * b_{12} * X_{23} * Y_{13} + b_{12} * c_{13} * X_{23} * Z_{12} - c_{12} * c_{23} * X_{13} * Y_{12} + b_{13} * c_{23} * X_{12} * Z_{12} - a_{23} * b_{12} * Z_{12} * Z_{13} + a_{12} * a_{12} * X_{23} * Y_{13} - b_{12} * b_{12} * X_{13} * Y_{23} - a_{12} * a_{12} * X_{13} * Y_{23} - a_{23} * b_{13} * X_{12} * X_{12} + a_{13} * b_{23} * Y_{12} * Y_{12} - a_{23} * b_{13} * Y_{12} * Y_{12} + a_{12} * b_{23} * Z_{12} * Z_{13} + a_{23} * c_{13} * Y_{12} * Z_{12} + a_{12} * c_{12} * Y_{23} * Z_{13} - b_{12} * c_{12} * X_{23} * Z_{13} - b_{23} * c_{13} * X_{12} * Z_{12} - a_{12} * b_{13} * Z_{12} * Z_{23} - a_{23} * c_{12} * Y_{12} * Z_{13} + a_{12} * c_{23} * Y_{13} * Z_{12} + b_{12} * c_{12} * X_{13} * Z_{23} - a_{12} * c_{12} * Y_{13} * Z_{23} - a_{13} * c_{23} * Y_{12} * Z_{12} - c_{12} * c_{13} * X_{12} * Y_{23} + c_{12} * c_{13} * X_{23} * Y_{12} + c_{12} * c_{23} * X_{12} * Y_{13} - b_{13} * c_{12} * X_{12} * Z_{23} + b_{23} * c_{12} * X_{12} * Z_{13} + a_{13} * b_{12} * Z_{12} * Z_{23} - a_{12} * c_{13} * Y_{23} * Z_{12} + a_{13} * c_{12} * Y_{12} * Z_{23} - b_{12} * c_{23} * X_{13} * Z_{12} \quad (11)$$

$$d_1 = -a_{12} * b_{13} * c_{12} * Z_{23} + b_{12} * c_{12} * c_{13} * X_{23} + b_{12} * b_{12} * b_{13} * X_{23} - a_{13} * b_{12} * b_{12} * Y_{23} - a_{12} * a_{12} * b_{23} * X_{13} + a_{23} * c_{12} * c_{13} * Y_{12} - a_{13} * c_{12} * c_{23} * Y_{12} + a_{12} * b_{13} * c_{23} * Z_{12} - a_{12} * a_{12} * a_{13} * Y_{23} - b_{23} * c_{12} * c_{13} * X_{12} + a_{12} * b_{23} * c_{12} * Z_{13} - a_{23} * b_{12} * c_{12} * Z_{13} - b_{12} * b_{12} * b_{23} * X_{13} + a_{23} * b_{12} * c_{13} * Z_{12} - a_{12} * c_{12} * c_{13} * Y_{23} + a_{12} * a_{12} * b_{13} * X_{23} + a_{12} * a_{12} * a_{23} * Y_{13} - a_{12} * b_{23} * c_{13} * Z_{12} - a_{13} * b_{12} * c_{23} * Z_{12} - b_{12} * c_{12} * c_{23} * X_{13} + b_{13} * c_{12} * c_{23} * X_{12} + a_{12} * c_{12} * c_{23} * Y_{13} + a_{23} * b_{12} * b_{12} * Y_{13} + a_{13} * b_{12} * c_{12} * Z_{23} \quad (12)$$

$$d_0 = a_{12} * b_{13} * c_{12} * c_{23} - a_{13} * b_{12} * b_{12} * b_{23} + a_{12} * a_{12} * a_{23} * b_{13} - a_{12} * a_{12} * a_{13} * b_{23} - a_{12} * b_{23} * c_{12} * c_{13} + a_{23} * b_{12} * b_{12} * b_{13} + a_{23} * b_{12} * c_{12} * c_{13} - a_{13} * b_{12} * c_{12} * c_{23} \quad (13)$$

A méretarány-tényező ismeretében az egyenletrendszerek lineárisak lesznek, amelyeknek a megoldása már nem jelent problémát (Awange és Grafarend (2002)). A ferdén szimmetrikus S mátrix a , b és c elemeit az alábbi lineáris egyenletekből nyerhetjük:

$$p_1 * a + p_0 = 0, \quad (14)$$

ahol

$$p_1 = -s * s * s * X_{13} * Y_{12} * Z_{12} - b_{12} * s * s * X_{13} * Z_{12} - a_{13} * b_{12} * c_{12} - a_{13} * s * s * Y_{12} * Z_{12} + b_{13} * s * s * X_{12} * Z_{12} + c_{12} * s * s * X_{12} * Y_{13} - a_{13} * c_{12} * s * Y_{12} + a_{12} * b_{13} * c_{12} + a_{12} * b_{13} * s * Z_{12} - a_{13} * b_{12} * s * Z_{12} - b_{12} * c_{12} * s * X_{13} + a_{12} * s * s * Y_{13} * Z_{12} + s * s * s * X_{12} * Y_{13} * Z_{12} + a_{12} * c_{12} * s * Y_{13} - c_{12} * s * s * X_{13} * Y_{12} + b_{13} * c_{12} * s * X_{12}$$

$$\begin{aligned}
p_0 = & -a_{12}^2 a_{13} - a_{12} c_{13} s^2 Z_{12} + a_{12} s^2 Z_{12} Z_{13} + a_{12} c_{12} s^2 Z_{13} \\
& - c_{12} c_{13} s^2 X_{12} - a_{12} c_{12} c_{13} + s^2 s^2 X_{13} Y_{12} Y_{12} - c_{13} s^2 s^2 X_{12} Z_{12} \\
& + s^2 s^2 X_{12} X_{12} X_{13} + s^2 s^2 X_{12} Z_{12} Z_{13} - a_{12} a_{12} s^2 X_{13} - b_{12} b_{12} s^2 X_{13} \\
& - a_{13} b_{12} b_{12} + a_{13} s^2 s^2 X_{12} X_{12} + a_{13} s^2 s^2 Y_{12} Y_{12} + c_{12} s^2 s^2 X_{12} Z_{13}
\end{aligned}$$

$$q_1 \cdot \mathbf{b} + q_0 = 0, \quad (15)$$

ahol

$$\begin{aligned}
q_1 = & b_{12} c_{12} s^2 X_{13} + b_{13} c_{12} s^2 X_{12} - a_{13} b_{12} s^2 Z_{12} - s^2 s^2 X_{13} Y_{12} Z_{12} \\
& - a_{13} c_{12} s^2 Y_{12} + a_{12} b_{13} c_{12} + a_{12} s^2 s^2 Y_{13} Z_{12} - a_{13} s^2 s^2 Y_{12} Z_{12} \\
& + a_{12} b_{13} s^2 Z_{12} + s^2 s^2 X_{12} Y_{13} Z_{12} - a_{13} b_{12} c_{12} + c_{12} s^2 s^2 X_{12} Y_{13} \\
& + a_{12} c_{12} s^2 Y_{13} - b_{12} s^2 s^2 X_{13} Z_{12} - c_{12} s^2 s^2 X_{13} Y_{12} + b_{13} s^2 s^2 X_{12} Z_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_0 = & -a_{12} a_{12} b_{13} - c_{12} c_{13} s^2 Y_{12} + b_{13} s^2 s^2 Y_{12} Y_{12} + c_{12} s^2 s^2 Y_{12} Z_{13} \\
& + s^2 s^2 Y_{12} Z_{12} Z_{13} + s^2 s^2 X_{12} X_{12} Y_{13} - b_{12} c_{13} s^2 Z_{12} + b_{12} s^2 s^2 Z_{12} Z_{13} \\
& - b_{12} b_{12} b_{13} - a_{12} a_{12} s^2 Y_{13} + b_{13} s^2 s^2 X_{12} X_{12} - c_{13} s^2 s^2 Y_{12} Z_{12} \\
& + b_{12} c_{12} s^2 Z_{13} + s^2 s^2 Y_{12} Y_{12} Y_{13} - b_{12} b_{12} s^2 Y_{13} - b_{12} c_{12} c_{13}
\end{aligned}$$

$$r_1 \cdot \mathbf{c} + r_0 = 0, \quad (16)$$

ahol

$$\begin{aligned}
r_1 = & -b_{12} s^2 X_{13} - a_{13} s^2 Y_{12} - s^2 s^2 X_{13} Y_{12} - a_{13} b_{12} \\
& + s^2 s^2 X_{12} Y_{13} + a_{12} b_{13} + a_{12} s^2 Y_{13} + b_{13} s^2 X_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_0 = & -a_{12} a_{13} - b_{12} b_{13} + s^2 s^2 Z_{12} Z_{13} + s^2 s^2 Y_{12} Y_{13} \\
& - c_{12} c_{13} + a_{13} s^2 X_{12} + b_{13} s^2 Y_{12} - a_{12} s^2 X_{13} \\
& + s^2 s^2 X_{12} X_{13} + c_{12} s^2 Z_{13} - b_{12} s^2 Y_{13} - c_{13} s^2 Z_{12}
\end{aligned}$$

Az \mathbf{R} forgatási mátrix felhasználásával az s , a , b , és c értékek ismeretében a még ismeretlen X_0 , Y_0 és Z_0 eltolási paraméterek értékeit a (1) képletből kifejezve az alábbi összefüggéssel nyerhetjük:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} - \frac{s}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (17)$$

4. A dátum-transzformáció Bursa-Wolf modellje

Az (1) transzformációt új jelölésekkel írjuk fel Shen Y. Z., Chen Y., Zheng D. H. (2006) tanulmánya alapján:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{t} + k \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

ahol \mathbf{t} az eltolás-vektor, k a méretarány-tényező, \mathbf{R} a forgatási mátrix, és \mathbf{s}_i illetve \mathbf{p}_i ugyanazon a pont ismert koordinátái a két koordináta rendszerben. Térjünk át súlyponti koordinátákra (a súlypont koordinátái \mathbf{s} ill. \mathbf{p}):

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{s}_i &= \mathbf{s}_i - \bar{\mathbf{s}} \Rightarrow \mathbf{s}_i = \Delta \mathbf{s}_i + \bar{\mathbf{s}}, \\ \Delta \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}} \Rightarrow \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{p}_i + \bar{\mathbf{p}}\end{aligned}\quad (19)$$

Visszaírva a transzformáció képletébe kapjuk:

$$\Delta \mathbf{s}_i + \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{t} + k \cdot \mathbf{R} \cdot (\Delta \mathbf{p}_i + \bar{\mathbf{p}}), i = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

Átrendezés után adódik:

$$\Delta \mathbf{s}_i + \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{t} + k \cdot \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{p}} + k \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

A transzformáció képlete a súlypontra is igaz, ezért a képlet közepe elhagyható, és marad:

$$\Delta \mathbf{s}_i = k \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

Az ismeretlen \mathbf{t} eltolás-vektortól így megszabadultunk, marad még k és \mathbf{R} .

5. Az ismeretlenek meghatározása szélsőérték feladatból

Határozzuk meg a maradékvektort:

$$\Delta \mathbf{v}_i = \Delta \mathbf{s}_i - k \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Tekintsük a következő optimalizálási feladatot:

$$\min_{k, \mathbf{R}} \sum_i \Delta \mathbf{v}_i^T \cdot \Delta \mathbf{v}_i = \min_{k, \mathbf{R}} \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i - k \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i)^T \cdot (\Delta \mathbf{s}_i - k \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i). \quad (24)$$

Mivel \mathbf{R} ortogonális mátrix ($\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{E}$), az egyenlet a következő alakban is felírható:

$$\min_{k, \mathbf{R}} \left\{ \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \Delta \mathbf{s}_i) - 2k \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i) + k^2 \sum_i (\Delta \mathbf{p}_i^T \cdot \Delta \mathbf{p}_i) \right\}. \quad (25)$$

A célfüggvény szélsőértékét a k szerinti parciális derivált eltűnése esetén veszi fel, így kapjuk, hogy

$$k = \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i) / \sum_i (\Delta \mathbf{p}_i^T \cdot \Delta \mathbf{p}_i). \quad (26)$$

Visszahelyettesítjük a k -ra kapott értéket a szélsőérték-feladatba:

$$\min_{\mathbf{R}} \left\{ \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \Delta \mathbf{s}_i) - \frac{\sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i)^2}{\sum_i (\Delta \mathbf{p}_i^T \cdot \Delta \mathbf{p}_i)} \right\}. \quad (27)$$

Mivel k -t már kiküszöböltük, a szélsőérték már csak az \mathbf{R} forgatási mátrix függvénye, így (27) első tagja elhagyható, a másodikból viszont az előjel miatt maximum számítandó (a nevezőt is elhagyhatjuk, mert nem tartalmaz ismeretlent):

$$\max_{\mathbf{R}} \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i). \quad (28)$$

6. A szélsőérték számítás megoldása kvaternió-algebrával

Kvaterniókra (4 dimenziós $\mathbf{S}=(0, \Delta \mathbf{s}^T)^T$, $\mathbf{P}=(0, \Delta \mathbf{p}^T)^T$ vektorokra) áttérve a (28) bilineáris alak az ismeretlen \mathbf{R} forgatási mátrix helyett az ismeretlen $\mathbf{Q}=(q_0, \mathbf{q}^T)^T$ kvaternióval is felírható, ahol a keresett \mathbf{R} forgatási mátrix és a számított \mathbf{Q} kvaternió között az alábbi összefüggés van:

$$\mathbf{R} = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{q}) \cdot \mathbf{E} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^T + q_0 \cdot C(\mathbf{q})) . \quad (29)$$

A kvaterniókra vonatkozó legfontosabb összefüggések:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= q_0 + q_1 \cdot \mathbf{i} + q_2 \cdot \mathbf{j} + q_3 \cdot \mathbf{k} = q_0 + \mathbf{q} \\ \mathbf{Q}^* &= q_0 - \mathbf{q} = (q_0, -\mathbf{q}^T)^T, \|\mathbf{Q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ C(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}^+ &= \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 \cdot \mathbf{E} + C(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}^- = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 \cdot \mathbf{E} - C(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

Most már minden adott (28) összefüggés átírásához:

$$\max_{\mathbf{R}} \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i) = \max_{\mathbf{Q}} \sum_i (\mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{Q}^+ \cdot \mathbf{P}_i^+ \cdot \mathbf{Q}^*) = \max_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{Q}, \quad (31)$$

ahol \mathbf{N} (4×4) mátrix a következő alakú :

$$\mathbf{N} = \sum_i \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \Delta \mathbf{p}_i & \Delta \mathbf{s}_i^T \cdot C(\Delta \mathbf{p}_i) \\ -C(\Delta \mathbf{s}_i) \cdot \Delta \mathbf{p}_i & \Delta \mathbf{s}_i \cdot \Delta \mathbf{p}_i^T + C(\Delta \mathbf{s}_i) \cdot C(\Delta \mathbf{p}_i) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

A (31) kvadratikus alak akkor éri el maximumát, ha \mathbf{Q} sajátvektora \mathbf{N} -nek, ekkor értéke megegyezik \mathbf{N} sajátértékével – tehát a maximalizálási feladat \mathbf{N} mátrix maximális λ sajátértékének, illetve a hozzá tartozó egységnyi \mathbf{Q} sajátvektornak (a keresett kvaterniónak) a meghatározására vezet.

A \mathbf{Q} kvaternió ismeretében (29) alapján az $\mathbf{R}(r_{ij})$ forgatási mátrix már felírható, ezért a forgásszögek kiszámíthatók:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right), \beta = \arcsin(-r_{13}), \gamma = \arctg\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right), \quad (33)$$

ahol α az x tengely, β az y tengely, és γ a z tengely körüli forgatási szöget jelöli. A k méretarány-tényezőt ezután (26) összefüggés alapján számítjuk, a \mathbf{t} eltolás-vektort pedig (18) alapján átlagolással határozhatjuk meg.

Összefoglalás

A tanulmányban megadtunk egy módszert a 3D, 7 paraméteres transzformáció nemlineáris egyenletrendszerének megoldására a forgatási mátrix parametrizálásával. Az eljárás sem nem iteratív, sem nem követeli meg a megfigyelési egyenletek linearizálását és tetszőleges koordinátatengely-menti elforgatások esetén érvényes. A 3D, 7 paraméteres dátum transzformációs probléma tárgyalása során a Gröbner-bázisra való áttéréssel a dátum transzformáció méretarány-tényezőjének meghatározásához negyed-fokú polinom-egyenletet kell megoldani.

A második, Bursa-Wolf modellben a kiegyenlítés iteráció nélkül, közvetlenül oldható meg kvaternió-algebra segítségével, ami jelentős számítási igény csökkenéssel jár.

Hivatkozások

- Awange J. L., Grafarend E. W. (2002): Zeitschrift für Vermessungswesen, 127, 109-116.
Awange J. L., Grafarend E.W. (2003): Allgemeine Vermessungsnachrichten, 4, 130-149.
Závoti J. (1999): Publications in Geomatics, 2, 1-149.
Závoti J. (2005): A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása, Geomatikai Közlemények, 8, 53-60.
Závoti J., Jancsó T. (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis, Acta Geod. Geoph. Hung., 41(1), 87-100.
Shen Y. Z., Chen Y., Zheng D. H. (2006): A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm, J. Geod. 80: 233–239.

A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció egy egyszerű megoldása

Závoti József
MTA CSFK GGI

A természetben fennálló összefüggések, törvények többségükben nemlineáris egyenletekre vezetnek, amelyeket általában linearizálva, iterációval szokás megoldani. A linearizálás eleve elhanyagolást, közelítést eredményez. Bizonyos esetekben lehetőség nyílik arra, hogy a nemlineáris problémákra egzakt, korrekt megoldást kapjunk. Az előadásban megadtunk egy levezetést a 3D hasonlósági transzformáció nemlineáris feladatának megoldására. A módszer sem nem iteratív, sem nem követeli meg a megfigyelési egyenletek linearizálását. A méretarány paraméterének meghatározására másodfokú polinom-egyenlet adódik, a forgatási mátrix paraméterei a legkisebb négyzetek módszerének ez elvéből is levezethetők. Maga a végeredmény ismert a szakirodalomban, ez a megoldás az egyszerűségével mégis figyelmet érdemel.

1. Bevezetés

A dátum transzformációk számítógépes algebrai rendszerekkel történő tárgyalásában Awange és Grafarend (2002, 2003a, 2003b) években megjelent tanulmányai tekinthetők kiindulási alapnak. Magyar nyelven Závoti (2005) tanulmánya módosításokat javasolt a matematikai modellhez. A Závoti, Jancsó (2006) tanulmány a módosításokat pontosította. Az abszolút tájékozási probléma kvaterniókkal történő megoldását Horn (1987) tanulmánya tartalmazta az elsők között.

A szakirodalomban eddig publikált eredmények azonban nem tekinthetők végleges megoldásnak, mert az alkalmazásuk nehézkes, a gyakorlati felhasználás során fellép az u.n. kombinatorikus robbanás problémája.

Ezen tanulmányban olyan matematikai megoldást adunk, amely kiküszöböli a kombinatorikus robbanás problémáját, és az egyéb numerikus nehézségek is elmaradnak.

2. A 3D, 7 paraméteres transzformáció megoldása

A 3-dimenziós, 7-paraméteres transzformáció gyakran használt eljárás a műszaki tudományokban, úgymint a geodéziában, a navigációs rendszerekben, a kartográfiában, az űrkutatásban és a számítógépes grafikában. Az egyik dátumban megadott pontokat torziómentesen a másik dátumba átvivő transzformáció matematikai összefüggése az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

ahol:

$[X_i, Y_i, Z_i]^T$ célpontok koordináta értékei,

$[X_0, Y_0, Z_0]^T$ az ismeretlen eltolási értékek,

λ az ismeretlen méretarány-tényező,

$\mathbf{R}(\omega, \varphi, \kappa)$ a forgási mátrix,

$[x_i, y_i, z_i]^T$ tárgyponok koordináta értékei.

Az \mathbf{R} forgási mátrix a három tengely körüli elforgatással, három független, meghatározandó ω , φ és κ paraméterrel írható le:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1(\omega)\mathbf{R}_2(\varphi)\mathbf{R}_3(\kappa). \quad (2)$$

Feladat. A 7 ismeretlen paraméter becslése a két rendszerben ismert közös pontok ($n \geq 3$) alapján.

Az R forgatási mátrixot az S ferdén szimmetrikus mátrix bevezetésével a következő módon írhatjuk fel:

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S), \quad (3)$$

ahol I_3 a három dimenziós egységmátrix, és S mátrixot az a , b és c paraméterekkel az alábbi módon adjuk meg:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Az adott közös pontok alapján meghatározhatók a két rendszer súlypontjainak koordinátái:

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, & Y_s &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}, & Z_s &= \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}, \\ x_s &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, & y_s &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, & z_s &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}. \end{aligned} \quad (5)$$

A súlypontok kielégítik az alábbi egyenleteket:

$$\begin{aligned} s_1 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_s - \lambda c y_s + \lambda b z_s - X_s - cY_s + bZ_s = 0 \\ s_2 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_s + \lambda y_s - \lambda a z_s + cX_s - Y_s - aZ_s = 0 \\ s_3 &:= bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_s + \lambda a y_s + \lambda z_s - bX_s + aY_s - Z_s = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Az (1) egyenleteket n pontra felírva, az alábbi egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned} f_1 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_1 - \lambda c y_1 + \lambda b z_1 - X_1 - cY_1 + bZ_1 = 0 \\ f_2 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_1 + \lambda y_1 - \lambda a z_1 + cX_1 - Y_1 - aZ_1 = 0 \\ f_3 &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_1 + \lambda a y_1 + \lambda z_1 - bX_1 + aY_1 - Z_1 = 0 \\ f_4 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_2 - \lambda c y_2 + \lambda b z_2 - X_2 - cY_2 + bZ_2 = 0 \\ f_5 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_2 + \lambda y_2 - \lambda a z_2 + cX_2 - Y_2 - aZ_2 = 0 \\ f_6 &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_2 + \lambda a y_2 + \lambda z_2 - bX_2 + aY_2 - Z_2 = 0 \\ &\vdots && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots \\ &\vdots && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots \\ &\vdots && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots \\ f_{3n-2} &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_n - \lambda c y_n + \lambda b z_n - X_n - cY_n + bZ_n = 0 \\ f_{3n-1} &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_n + \lambda y_n - \lambda a z_n + cX_n - Y_n - aZ_n = 0 \\ f_{3n} &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_n + \lambda a y_n + \lambda z_n - bX_n + aY_n - Z_n = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

A fenti egyenletekből az s_1 , s_2 és s_3 súlyponti egyenleteket rendre kivonva, eltávolíthatjuk az eltolási paramétereket és az egyenletekben egyúttal áttérünk a súlyponti koordinátákra:

$$\begin{aligned}
 f_{1s} &:= f_1 - s_1 = \lambda x_{1s} - \lambda c y_{1s} + \lambda b z_{1s} - X_{1s} - c Y_{1s} + b Z_{1s} = 0 \\
 f_{2s} &:= f_2 - s_2 = \lambda c x_{1s} + \lambda y_{1s} - \lambda a z_{1s} + c X_{1s} - Y_{1s} - a Z_{1s} = 0 \\
 f_{3s} &:= f_3 - s_3 = -\lambda b x_{1s} + \lambda a y_{1s} + \lambda z_{1s} - b X_{1s} + a Y_{1s} - Z_{1s} = 0 \\
 f_{4s} &:= f_4 - s_1 = \lambda x_{2s} - \lambda c y_{2s} + \lambda b z_{2s} - X_{2s} - c Y_{2s} + b Z_{2s} = 0 \\
 f_{5s} &:= f_5 - s_2 = \lambda c x_{2s} + \lambda y_{2s} - \lambda a z_{2s} + c X_{2s} - Y_{2s} - a Z_{2s} = 0 \\
 f_{6s} &:= f_6 - s_3 = -\lambda b x_{2s} + \lambda a y_{2s} + \lambda z_{2s} - b X_{2s} + a Y_{2s} - Z_{2s} = 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 f_{3n-2s} &:= f_{3n-2} - s_1 = \lambda x_{ns} - \lambda c y_{ns} + \lambda b z_{ns} - X_{ns} - c Y_{ns} + b Z_{ns} = 0 \\
 f_{3n-1s} &:= f_{3n-1} - s_2 = \lambda c x_{ns} + \lambda y_{ns} - \lambda a z_{ns} + c X_{ns} - Y_{ns} - a Z_{ns} = 0 \\
 f_{3ns} &:= f_{3n} - s_3 = -\lambda b x_{ns} + \lambda a y_{ns} + \lambda z_{ns} - b X_{ns} + a Y_{ns} - Z_{ns} = 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 X_{is} &= X_i - X_s, \quad Y_{is} = Y_i - Y_s, \quad Z_{is} = Z_i - Z_s \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \\
 x_{is} &= x_i - x_s, \quad y_{is} = y_i - y_s, \quad z_{is} = z_i - z_s \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Az f_{3i-2s} , f_{3i-1s} ($i=1, 2, 3, \dots, n$) egyenletekből a b paramétert, illetve az a paramétert kifejezve, kapjuk az alábbi formulákat:

$$\begin{aligned}
 b &= (-\lambda x_{is} + \lambda c y_{is} + X_{is} + c Y_{is}) / (Z_{is} + \lambda z_{is}) \\
 a &= (\lambda c x_{is} + \lambda y_{is} + c X_{is} - Y_{is}) / (Z_{is} + \lambda z_{is}) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Az f_{3is} ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) egyenletek a következő módon is felírhatók:

$$(\lambda y_{is} + Y_{is})a - (\lambda x_{is} + X_{is})b = Z_{is} - \lambda z_{is}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \tag{10}$$

A (9) összefüggéssel adott a és b paramétereket a (10) képletbe helyettesítve adódik az alábbi egyenlet:

$$\begin{aligned}
 (\lambda y_{is} + Y_{is})[\lambda y_{is} - Y_{is} + c(\lambda x_{is} + X_{is})] + (\lambda x_{is} + X_{is})[\lambda x_{is} - X_{is} - c(\lambda y_{is} + Y_{is})] &= Z_{is}^2 - \lambda^2 z_{is}^2, \\
 &(i = 1, 2, 3, \dots, n).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Néhány egyszerűsítés és összevonás után azt tapasztaljuk, hogy a c ismeretlen paraméter kiesik, és a λ paraméterre egy ismeretlenes, másodfokú, túlhatározott egyenletrendszer áll elő egy:

$$\lambda^2 (x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2) = X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \tag{12}$$

Az egyenletrendszer a következő alakban is felírható:

$$\left(\lambda \sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} - \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2} \right) \left(\lambda \sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} + \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \tag{13}$$

Ezen túlhatározott egyenletrendszer megoldása során a λ méretarány-tényezőre - a számunkra fizikai jelentéssel bíró pozitív gyök alapján - az alábbi, az Albertz-Kreiling (1975) kézikönyvben megadott, a tapasztalatból is ismert összefüggés, vagy a Horn (1987) tanulmányában a kvaterniókkal levezetett összefüggés adódik:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2}}. \quad (14)$$

Tehát esetünkben a méretarány-tényező a másodfokú egyenletekből egyértelműen meghatározható – a szakirodalomból ismert (Awange és Grafarend (2002)) negyedfokú polinom gyökeinek kényszerű szétválasztási eljárásával ellentétben.

3. A lineáris paraméterek meghatározása

A λ méretarány-tényező ismeretében valamennyi pontra a (8) összefüggés felhasználásával az alábbi formában írhatjuk fel a közvetítő egyenleteket:

$$\begin{bmatrix} X_{1s} - \lambda x_{1s} \\ Y_{1s} - \lambda y_{1s} \\ Z_{1s} - \lambda z_{1s} \\ X_{2s} - \lambda x_{2s} \\ Y_{2s} - \lambda y_{2s} \\ Z_{2s} - \lambda z_{2s} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{ns} - \lambda x_{ns} \\ Y_{ns} - \lambda y_{ns} \\ Z_{ns} - \lambda z_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{xn} \\ v_{yn} \\ v_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda z_{1s} + Z_{1s} & -(\lambda y_{1s} + Y_{1s}) \\ -(\lambda z_{1s} + Z_{1s}) & 0 & \lambda x_{1s} + X_{1s} \\ \lambda y_{1s} + Y_{1s} & -(\lambda x_{1s} + X_{1s}) & 0 \\ 0 & \lambda z_{2s} + Z_{2s} & -(\lambda y_{2s} + Y_{2s}) \\ -(\lambda z_{2s} + Z_{2s}) & 0 & \lambda x_{2s} + X_{2s} \\ \lambda y_{2s} + Y_{2s} & -(\lambda x_{2s} + X_{2s}) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda z_{ns} + Z_{ns} & -(\lambda y_{ns} + Y_{ns}) \\ -(\lambda z_{ns} + Z_{ns}) & 0 & \lambda x_{ns} + X_{ns} \\ \lambda y_{ns} + Y_{ns} & -(\lambda x_{ns} + X_{ns}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (15)$$

A Gauss-Helmert modell alapján keressük az alábbi szélsőérték feladat megoldását:

$$\sum_{i=1}^n v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2 \xrightarrow{\min} \quad (16)$$

Néhány mátrix-aritmetikai azonosság alkalmazásával a következő normál mátrix vezethető le:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n [(\lambda y_{is} + Y_{is})^2 + (\lambda z_{is} + Z_{is})^2] & -\sum_{i=1}^n (\lambda x_{is} + X_{is})(\lambda y_{is} + Y_{is}) & -\sum_{i=1}^n (\lambda x_{is} + X_{is})(\lambda z_{is} + Z_{is}) \\ \sum_{i=1}^n (\lambda x_{is} + X_{is})(\lambda y_{is} + Y_{is}) & \sum_{i=1}^n [(\lambda x_{is} + X_{is})^2 + (\lambda z_{is} + Z_{is})^2] & -\sum_{i=1}^n (\lambda y_{is} + Y_{is})(\lambda z_{is} + Z_{is}) \\ \sum_{i=1}^n (\lambda x_{is} + X_{is})(\lambda z_{is} + Z_{is}) & -\sum_{i=1}^n (\lambda y_{is} + Y_{is})(\lambda z_{is} + Z_{is}) & \sum_{i=1}^n [(\lambda x_{is} + X_{is})^2 + (\lambda y_{is} + Y_{is})^2] \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Hasonló módon adódik a normálvektor:

$$2\lambda \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (y_{is} Z_{is} - z_{is} Y_{is}) \\ \sum_{i=1}^n (z_{is} X_{is} - x_{is} Z_{is}) \\ \sum_{i=1}^n (x_{is} Y_{is} - y_{is} X_{is}) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A 3x3 méretű normál egyenletrendszerből az a , b és c paraméterek számos eljárással meghatározhatók, mi a singular value decomposition módszert javasoljuk. A még ismeretlen

X_0 , Y_0 és Z_0 eltolási paramétereiket az (1) összefüggés alapján az alábbi egyenletből lehet meghatározni:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}, \quad (19)$$

ahol a súlypontok a két koordináta-rendszerben adott közös pontok koordinátáiból számoltak.

4. Összefoglalás

A tudományos kutatásokat segítő technikai eszközök, eljárások fejlődésével a műszaki tudományok elmélete is fejlődik: új elméletek alakulnak ki, új modellek keletkeznek, új kiértékelési módszereket dolgoznak ki, amelyek pontosabbak, vagy egyszerűbbek, mint a korábbi eljárások. A műszaki tudományok egyik fontos feladatára, a 3D, 7 paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció megoldására egy olyan új levezetést mutattunk be, amely összhangban van az eddigi eredményekkel, de az ismert elméleteknél sokkal egyszerűbb és világosabb matematikai eszközöket használ fel.

A 3D, 7 paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció megoldásához az általunk megadott új matematikai levezetés a forgási mátrix alkalmas paraméterezésén alapul. Ez a módszer nem igényel iterációt és nem szükséges a megfigyelési egyenletek sorba fejtése, linearizálása sem. Nincs megkötés a tengelykörüli forgatások nagyságrendjére vonatkozóan sem. A modell levezetése során a 3D, 7 paraméteres dátum transzformáció problémáját mi egy másodfokú polinom egyenlet megoldására vezettük vissza, a szakirodalomban ismert negyedfokú egyenlettel szemben. A kidolgozott matematikai modell nem a szakirodalomból ismert kvaterniókat, nem a Gröbner-bázist, nem a Dixon- vagy Sylvester rezultánst alkalmazza, hanem elemi matematikai eszközöket használ fel.

Hivatkozások

- Albertz, Kreiling (1975): Photogrammetric Guide, Herbert Wichmann Verl. Karlsruhe, 58-60.
- Awange J. L., Grafarend E. W. (2002): Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation c_7 (3) problem. Zeitschrift für Vermessungswesen, 127, 109-116.
- Awange J. L., Grafarend E. W. (2003a): Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformation. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 4, 130-149.
- Awange J. L., Grafarend E. W. (2003b): Journal of Geodesy, 77, 66-76.
- Horn B. K. P. (1987): Closed form solution of absolute orientation using unit quaternions. J. of the Optical Society of America, 4, 629-642.
- Závoti J. (2005): A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása. Geomatikai Közlemények, VIII, 53-60.
- Závoti J., Jancsó T. (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis. Acta Geod. Geoph. Hung., 41(1), 87-100.

Adatbányászat – FIM algoritmusok

Pödör Zoltán

NyME EMK Matematikai Intézet

ABSZTRAKT. Az adathalmazok méretének jelentős növekedésével egyre nehezebbé vált azok feldolgozása, a hasznos információk hagyományos módszerekkel történő felfedése. Az adatbányászat éppen az ilyen jellegű problémák megoldásában erős, alkalmas a giga- terabájt méretű adathalmazok hatékony feldolgozására, azokból az értékes tudás kinyerésére. Számítalan részfeladat köthető ehhez a területhez, azonban a gyakori elemhalmazok bányászata (Frequent Itemset Mining, FIM) időben is az egyik első ilyen jellegű probléma volt, mely számos egyéb – gyakori minták kinyerésére vonatkozó – feladat megoldásában is fontos szerepet játszik. Bemutatjuk a legfontosabb algoritmusokat és módszereket a gyakori elemhalmazok előállítására vonatkozóan.

1. Bevezetés

Manapság az élet minden területére jellemző az adatok, információk gyűjtése, eltárolása. Amíg azonban ezek nem kerülnek feldolgozásra, nem értékeljük azokat, addig pusztán adattemetőkről beszélhetünk csak. Az eltárolt adatok mennyisége exponenciális növekedést mutat, így a feldolgozás területén is újfajta megközelítésekre van szükség a hagyományos elemzési módszerek mellett. Az adatbányászat az ehhez szükséges technikákat, módszereket és eszköztárakat jelentheti, mert ez az intelligens adatfeldolgozás lehetővé teszi a nem triviális összefüggések, információk, azaz új tudás kinyerését nagyméretű adathalmazokból (big data). Az adatbányászat egy tipikusan multidiszciplináris terület, mely számítalan, önmagában is komoly tudományos részterületet foglal magában.



1. ábra – Adatbányászat felépítése

Ugyanakkor nagyon sokrétű problémakör megoldhatóságának kérdéseit fedi le, mint pl. gyakori minták kinyerése, klaszterezési, osztályozási problémák, szövegbányászat, idősorok elemzése, stb..

A gyakori minták bányászata magában foglalja a gyakori elemhalmazok, sorozatok, bool-sorozatok, gráfok bányászata. A gyakori elemhalmazok bányászata az adatbányászat egy alapvető és saját területe, mely elindította és inspirálta az egyéb gyakori minták kinyerésére vonatkozó kutatásokat is. Bemutatjuk a gyakori elemhalmazok kinyerésére vonatkozó módszereket, melyek az egyéb, gyakori mintákat kereső eljárásoknak az alapjait is képezik. A kérdést alapvetően az alábbi gyakorlati probléma vetette fel: melyek a gyakran együtt vásárolt termékek, és ez alapján milyen marketing stratégiákat lehet kialakítani növelendő a bevételt.

5. Alapfogalmak, jelölések

Jelölje $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ az elemek alaphalmazát (pl. a boltban kapható áruk). Az I halmaz részhalmazait *elemhalmazoknak* vagy *tranzakcióknak* nevezzük, amennyiben egy elemhalmaz k darab elemet tartalmaz *k-elemhalmaznak* hívjuk. Legyen $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ a tranzakciók halmaza, ahol $t_i \subseteq I, 1 \leq i \leq n$. Minden tranzakcióhoz egy egyedi azonosítót rendelünk, amit TID azonosítónak (Transaction IDentifier) nevezünk.

Azt mondjuk, hogy a t tranzakció tartalmazza az A elemhalmazt, ha $A \subseteq t$. Azon t tranzakciók összességét, melyek magukban foglalják az A elemhalmazt *A fedésének*, a tranzakciók darabszámát pedig *A támogatottságának*, *előfordulási gyakoriságának* vagy *megalapozottságának* nevezzük és $supp(A)$ vagy $freq(A)$ -val szokás jelölni. Formálisan kifejezve:

$$supp(A) = |\{t_i | A \subseteq t_i \text{ és } t_i \in T\}|.$$

Minimális megalapozottsági értéknek nevezzük és *minsupp*-pal jelöljük azt a felhasználó által definiált számot, ahány tranzakcióban egy elemhalmaznak legalább elő kell fordulnia, hogy gyakori legyen. Az A elemhalmazt *gyakorinak* nevezzük, ha $supp(A) \geq minsupp$.

5.1. Tranzakciók tárolása

A T tranzakciós adatbázis tárolási módja lényeges a felhasznált gyakori elemhalmazt kereső algoritmusok alkalmazhatósága és hatékonysága szempontjából. A gyakorlatban három adattárolási lehetőséget szoktak alkalmazni [1], [2]. Horizontális tárolási forma esetén minden TID azonosítóval ellátott tranzakcióhoz eltároljuk a benne szereplő elemeket. Vertikális adatforma esetében az univerzum minden egyes eleméhez eltároljuk azon TID azonosítókat, melyekben az adott elem előfordul. Végül a relációs tárolási módban minden rekord két attribútummal kerül eltárolásra, az első a TID azonosító, második pedig az adott elem.

| Horizontális | | Vertikális | | Relációs | |
|--------------|-------------|------------|-----------|----------|-------|
| TID | elem | elem | TID lista | TID | elem |
| T1 | $i_1, i_2,$ | i_1 | T1,T3 | T1 | i_1 |
| T2 | i_2, i_3 | i_2 | T1,T2 | T1 | i_2 |
| T3 | i_1, i_4 | i_3 | T2 | T2 | i_2 |

1. táblázat - Tranzakciók tárolási módjai

A gyakorlatban fontos, hogy a teljes bemenet tárolható-e a memóriában (bár erre nem minden esetben van feltétlenül szükség). Ma már a komoly számítógépek jelentős memóriával rendelkeznek, azonban az adatbázisok mérete sok esetben még így is problémát jelenthet. Ezért célszerű már a vizsgálat elején elvégezni néhány egyszerű lépést, amely csökkentheti az adatbázis méretét [1], [4], [5], [8]. A teljesen egyező tranzakciókat felesleges többször eltárolni, elég egy számláló segítségével ezt nyilvántartani. Azokat az elemeket, melyek nem elégítik ki a *minsupp* feltételt töröljük a tranzakciókból és ez alapján további szűrések is alkalmazhatóak T -re. *Keresési téren* a továbbiakban az I halmaz teljes részhalmaz hálóját értjük, mely I összes részhalmazát tartalmazza.

6. A FIM algoritmusok általános jellemzése

A gyakori elemhalmazok bányászatának feladata, hogy a T tranzakciós adatbázis és az I elemhalmaz alapján a *minsupp* küszöb figyelembe vétele mellett az összes gyakori

elemhalmazt előállítsa. Az algoritmusoknak teljesnek és helyesnek kell lenniük, azaz minden gyakori elemhalmazt és csak a gyakoriakat kell megtalálniuk, ráadásul minél hatékonyabban.

6.1. Naiv megközelítés

A gyakorlatban előforduló adatbázisokban az elemek száma gyakran $10^6 - 10^8$, a tranzakciók száma pedig 10^{10} nagyságrendű is lehet és egy-egy tranzakció akár több tucat elemet tartalmazhat. Miért problémás az az egyszerűnek tűnő megközelítés, hogy vegyük I összes nemüres részhalmazát és határozzuk meg azok gyakoriságait. Már egy 100 elemű tranzakció összes lehetséges részhalmazainak tárolása és feldolgozása is kezelhetetlen, így a hatékonyság növelése céljából jelentősen csökkenteni kell a keresési tér méretét.

6.2. FIM algoritmusok alapjai

Három jól ismert alpmódszert különböztethetünk meg: Apriori [11], ECLAT [9] és FP-growth [12] algoritmusok, a többi általában ezek valamilyen javított, módosított változata. Mindhárom az üres mintából indul, amit megfelelő módon bővítve előállítja az összes gyakori elemhalmazokat. Az algoritmusok egy adott iterációjában jelöltnek hívjuk azokat az elemhalmazokat, amelyek potenciális gyakori elemhalmazok és támogatottságukat az adott lépésben meghatározzuk.

Általánosságban elmondható, hogy az algoritmusok alapvetően az alábbi lépéseket ismétlik az egyes iterációkban (ezek megvalósításából, végrehajtásából adódnak az eltérések):

1. Jelölt állítás.
2. Jelöltek támogatottságának meghatározása.
3. Gyakori elemhalmazok kiválasztása.

Látni fogjuk, hogy lényeges feltevés az elemek lexikografikus rendezhetősége, ennek köszönhető, hogy az algoritmusok mindegyike ismétlés nélkül állít elő jelölteket.

6.3. Algoritmusok csoportosítása

A FIM algoritmusok csoportosítása tekintetében általánosan elfogadottnak tekinthető két szempont [1]: hogyan keressük meg a jelölteket és hogyan határozzuk meg azok gyakoriságát. A jelöltek meghatározása során a kérdés, hogy a keresési teret mélységben vagy szélességben járjuk-e be. Szélességi bejárás esetén a $(k + 1)$ -elemű jelölteket mindig a már ismert gyakori k -elemhalmazokból állítjuk elő, míg mélységi bejárás esetén mindig egy-egy elemmel növeljük az éppen vizsgált elemhalmazt. Az előállított jelöltek gyakoriságát meghatározhatjuk vízszintes növeléssel, ekkor T -t végig vizsgálva állítjuk elő az elemhalmaz gyakoriságát. A függőleges összevonás során egy elemhalmaz gyakoriságát a megfelelő TID listák metszeteként állítjuk elő.

| | vízszintes növelés | függőleges összevonás |
|--------------------|--------------------|-----------------------|
| szélességi bejárás | APRIORI | PARTITION |
| mélységi bejárás | FP-growth | ECLAT |

2. táblázat - Az algoritmusok csoportosítása [1]

7. Az alap algoritmusok

Bemutatjuk az említett három eljárás elméleti alapjait, a megvalósítás néhány érdekes és fontos kérdését.

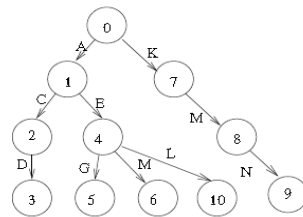
7.1. Apriori algoritmus

Az eljárás a keresési tér szélességi bejárását valósítja meg, az alapelv az *Apriori tulajdonság*, mely szerint a gyakori elemhalmazok minden nemüres részhalma is gyakori, így ha egy A elemhalmaz nem gyakori, akkor annak bármely valódi szuperhalma sem lehet az (antimonoton tulajdonság). Egy adott iterációban csak olyan jelöltet tekinthetünk, amelynek összes valódi részhalmairól tudjuk, hogy gyakori.

Jelölje C_k a k -elemű jelöltek, L_k pedig a k -elemű gyakori elemhalmazok halmazát. Az Apriori-elvet alkalmazva a k . iterációs lépésben ($k \geq 2$) L_{k-1} ismeretében állítjuk elő C_k -t összekapcsolással, melyből aztán elhagyjuk a felesleges elemhalmazokat. A C_k ban szereplő jelöltekről *minsupp* ismeretében eldönthető, hogy bekerülnek-e L_k -ba vagy sem. Így az Apriori algoritmus két alaplépése a jelöltek generálására (feltételezve, hogy a tranzakciók elemei már lexikografikusan rendezettek):

- *Összekapcsolás:* C_k meghatározásához tekintsük a már ismert L_{k-1} elemeit. A művelet során L_{k-1} azon elempárjai kapcsolhatóak össze, melyek $(k-2)$ -elemű prefixe egyezik.
- *Apriori tulajdonság és elhagyás:* C_k méretének csökkentéséhez felhasználjuk az Apriori tulajdonságot, ha valamely C_k jelölt $(k-1)$ -elemű részhalma nem L_{k-1} -beli, akkor a jelölt eltávolítható C_k -ből. Majd az adatbázis teljes átvizsgálásával minden C_k -beli jelölről eldönthető, hogy gyakori-e vagy sem, így előállítva L_k -t.

Az eredeti publikációban [11] a jelöltek tárolására és támogatottságuk meghatározására Hash-fát javasoltak. Később kísérletek igazolták, hogy hatékonyabb erre a szófa [3], [4], [6].



2. ábra - Szófa struktúra jelöltek tárolására (gyakoriság számláló nélkül) [2]

A szófa minden egyes l levele egy-egy szót reprezentál, mely a gyökértől a levélig vezető út elemeinek konkatenációjával kapható. Az egyes csúcsokban pedig a csúcs által reprezentált elemhalmazok gyakoriságát tárolhatjuk. A szófat prefix fának is nevezik, mert a közös prefixeket csak egyszer tárolja. Számos technika ismert a szófa méretének csökkentésére, azonban ezekre itt nem térünk ki.

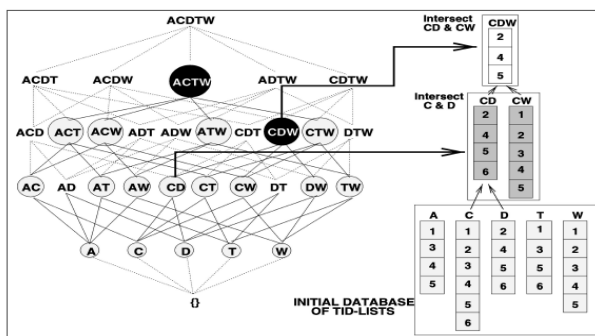
7.2. Eclat algoritmus

Az 1997-ben publikált eljárás [9] a keresési tér mélységi bejárását valósítja meg és vertikális tranzakciós adatbázist használ. Az ECLAT algoritmus jelöltállítási folyamata gyakorlatilag egyezik az Apriori algoritmuséval, azonban avval ellentétben mindig egyetlen l -elemű jelöltet állít és ennek rögtön vizsgálja a gyakoriságát, illetve nem ellenőrzi a kapott jelölt $(l-1)$ -elemű részhalmaira, hogy azok gyakoriak-e. A TID-halmaz két fontos tulajdonsággal rendelkezik:

- Az A elemhalmaz TID-halmazának mérete meghatározza A támogatottságát.
- Egy jelölt TID-halmazát megkaphatjuk a generátorainak TID-halmazáiból egy egyszerű metszetképzéssel.

Az ECLAT legalább annyi jelöltet állít, mint az Apriori, azonban igazi ereje a támogatottság meghatározásában rejlik, a TID-halmazok könnyen előállíthatóak és méretük

folyamatosan csökken, míg az Aprioriban a szófa mérete az algoritmus előrehaladtával nő. A jelölteket itt is egy prefix fában érdemes tárolni, erre mutat példát Borgelt megvalósítása [3], illetve a hosszú TID-halmazokra további redukálási lehetőséget jelenthet a Zaki [10] által javasolt *diffsetek* alkalmazása



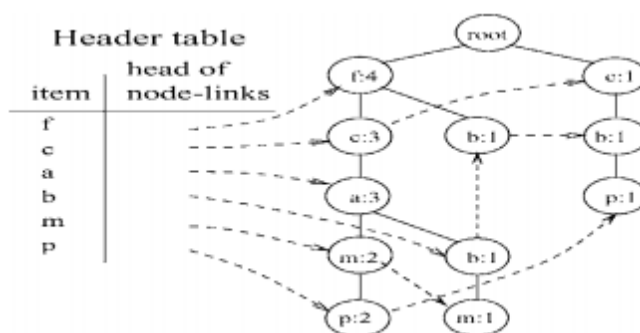
3. ábra - ECLAT algoritmus - jelöltállítás és a támogatottság meghatározása [1]

7.3. FP-growth algoritmus

Az Apriori algoritmus a jelölt elemek állításával és ellenőrzésével jelentősen csökkenti a potenciális gyakori elemhalmazok számát. Azonban adódhat így is két nem elhanyagolható költség, a nagy mennyiségű jelölthalmaz generálása és az adatbázis többszöri átvizsgálása, a jelölthalmazok mintaillesztése. A problémára megoldást nyújthatnak a mintanövelő eljárások, mint pl. az FP-growth algoritmus [7].

Az FP-fa egy keresztelékekkel és egy fejléc táblával kibővített szófa. Minden belső csúcshoz tartozik egy elemnév, egy számláló, ami azt mutatja, hogy a gyökértől eddig a csúcsig tartó prefix hány tranzakcióban fordul elő és egy csúcslink, mert az azonos címkejű csúcsok láncoltlista-szerűen össze vannak kötve keresztirányú élekkel. A lánc legelső elemére mutat a fejléc táblának az adott eleméhez tartozó mutatója. A *fejléc tábla* alapvetően az elemnév és a lista fejének azonosítóját tartalmazza, ami az FP-fa első olyan elemére mutat, ami egyezik a tábla elemnévvel.

| TID | Items bought | (Ordered) frequent items |
|-----|------------------------|--------------------------|
| 100 | f, a, c, d, g, i, m, p | f, c, a, m, p |
| 200 | a, b, c, f, l, m, o | f, c, a, b, m |
| 300 | b, f, h, j, o | f, b |
| 400 | b, c, k, s, p | c, b, p |
| 500 | a, f, c, e, l, p, m, n | f, c, a, m, p |



4. ábra - Tranzakciós adatbázis és a felépített FP-fa [7]

Az eredeti adatbázis gyakori elemhalmazainak bányászatát a felépített FP-fa vizsgálatára vezetjük vissza. A tapasztalatok alapján az elemhalmazok gyakoriság szerinti csökkenő sorrendbe tárolása a leghatékonyabb.

Minden gyakori elem meghatározhatóak azon gyakori elemhalmazok, melyek tartalmazzák a-t, követve a fejléc tábla a jelű sorából induló él listát. Minden vizsgált elemhez létrehozunk a feltételes minta bázist, majd a feltételes FP-fát. Egy P úton az a csúcsra

meghatározandó a gyakori mintákat csak az a P-re illeszkedő prefix útjait kell összegezni és az ott szereplő csúcsok gyakoriságát a vizsgált a elem gyakoriságának megfelelően kell beállítani. Ezt rekurzívan ismételjük, amíg az eredmény FP-fa üres, vagy egyetlen útvonalat tartalmaz, melynek minden részútvonala gyakori mintát ad. Így előállíthatóak az a elemet tartalmazó gyakori elemhalmazok. Ezt az összes gyakori elemre megismételve előállítható a gyakori elemhalmazok teljes halmaza.

A három bemutatott algoritmus a gyakori elemhalmaz bányászatban alapeljárásnak tekinthető, melyeknek számtalan javított, módosított változata született, melyekre itt nem tudunk kitérni. Ugyanakkor a kinyert gyakori elemhalmazok mennyiség is kívánatosá teszi olyan speciális technikák alkalmazását, melye segítségével tömör módon vagyunk képesek reprezentálni az eredményhalmazt.

8. Összefoglalás

A gyakori elemhalmaz bányászat volt az egyik első olyan terület, mely mind elmélet, mind gyakorlati síkon igazolta az adatbányászat, mint új tudományterült létjogosultságát, mert a korábbi módszerek egyike sem lett volna alkalmas ezen feladat megoldására. Definiáltuk az alapfeladatot, bemutattuk azokat a fontos algoritmusokat, melyek alkalmasak a probléma hatékony és gyors megoldására. Természetesen itt nem törekedhettünk a teljességre, hiszen számtalan egyéb algoritmus is létezik, azonban ezek szinte mindegyike a három alaplól építkezik. Ugyanakkor speciálisan kialakított adatbázisokhoz mindig létrehozhatóak olyan eljárások, melyek abban az adott esetben hatékonyabbak lehetnek, mint a többi. Fontos megjegyezni, hogy a különböző, elvben hatékony algoritmusok gyakorlati működését nagyban befolyásolja az implementáció hatékonysága is.

Irodalomjegyzék

- [1] Abonyi János, Adatbányászat a hatékonyság eszköze, ComputerBooks, Budapest, 2006.
- [2] B. Ferenc, Adatbányászati algoritmusok, jegyzet, 2010.
- [3] C. Borgelt, Efficient Implementation of Apriori and Eclat, Workshop of Frequent Item Set Mining Implementations (FIMI 2003, Melbourne, FL, USA), 9 pages.
- [4] F. Bodon, A fast APRIORI implementation, IEEE ICDM Workshop on Frequent Itemset Mining Implementations (FIMI'03), in Bart Goethals and Mohammed J. Zaki editors, CEUR Workshop Proceedings, volume 90, Melbourne, Florida, USA, 19. November 2003, 10 pages.
- [5] F. Bodon, Surprising results of trie-based FIM algorithms, IEEE ICDM Workshop on Frequent Itemset Mining Implementations (FIMI'04), in Bart Goethals and Mohammed J. Zaki and Roberto Bayardo editors, CEUR Workshop Proceedings, volume 126, Brighton, UK, 1. November 2004, 11 pages.
- [6] F. Bodon, A Trie-based APRIORI Implementation for Mining Frequent Itemsequences, ACM SIGKDD Workshop on Open Source Data Mining Workshop (OSDM'05), in Bart Goethals and Siegfried Nijssen and Mohammed J. Zaki editors, 56 - 65 oldalak, Chicago, IL, USA. 2005, 10 pages.
- [7] J. Han, J. Pei, Y. Yin and R. Mao, Mining Frequent Patterns without Candidate Generation: A Frequent-Pattern Tree Approach, *Data Mining and Knowledge Discovery*, 8(1): 53-87, 2004.
- [8] J. Han, M. Kamber: *Data Mining: Concepts and Techniques (2)*, Morgan Kaufmann Publishers, 2006.
- [9] M. J. Zaki, S. Parthasarathy, M. Ogihara, W. Li. New algorithms for fast discovery of association rules. *Proc 3rd Int. Conf. of Knowledge Discovery and Data Mining (KDD'97)*, pages 283-296, AAAI Press, Menlo Park, USA, 1997.
- [10] M. J. Zaki, K. Gouda, Fast Vertical Mining Using Diffsets. In *9th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Aug 2003, 10 pages.
- [11] R. Agrawal, R. Srikant, Fast Algorithms for Mining Association Rules, *Proc. of the 20th Int'l Conference on Very Large Databases*, Santiago, Chile, Sept. 1994. Expanded version available as IBM Research Report RJ9839, June 1994, 13 pages.
- [12] S. Brin, R. Motwani, J.D. Ullman, S. Tsur, Dynamic Itemset Counting and Implication Rules for Market Basket Data, *SIGMOD Record*, Volume 6, Number 2: New York, pages 255-264. June 1997.

A (4,5,4,5) mozaikhoz tartozó kristálynövekedési hányados

Németh László

NymE EMK Matematikai Intézet

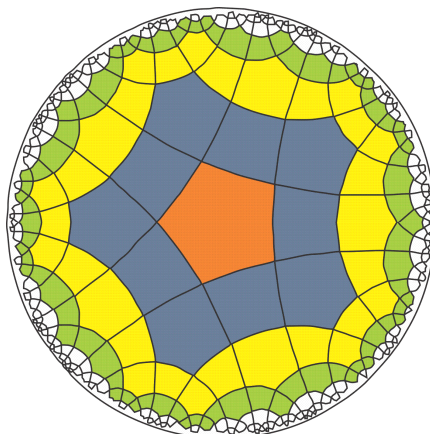
ABSZTRAKT. Ebben a cikkben egy hiperbolikus félig szabályos mozaik, a (4,5,4,5) mozaik kristálynövekedési hányadosát határozzuk meg, amely egy cella köré létrehozott, egymás utáni övezetek elemszámai hányadosainak határértéke.

1. Bevezetés

Tekintsünk egy mozaikot. A mozaik egy tetszőleges elemét (vagy egy pontját) tekintsük 0. övezetnek. Az 1. övezet tartalmazza azokat a mozaikelemeket, melyeknek van közös pontja a 0. övezettel. Ezen övezetek köré hozzunk létre további övezeteket a következő rekurzív módon. Az $(i + 1)$. övezet álljon azokból a mozaikelemekből, melyeknek van legalább egy közös csúcspontjuk az i . övezettel, de nincs egyetlen közös pontjuk sem az $(i - 1)$. övezettel $(i > 1)$. Jelentse r_i az i . övezetben levő mozaikelemek (vagy cellák) számát, ekkor a $\lim_{i \rightarrow \infty} (r_{i+1}/r_i)$ határértéket, Vermes I. javaslatára, a mozaikhoz tartozó kristálynövekedési hányadosnak nevezzük. A hiperbolikus szabályos mozaikok esetében nem csak a síkban ([1], [2], [6]), hanem több dimenziós terekben is kiszámolták már e határérték ([3], [4], [5], [7]). A továbbiakban egy félig szabályos esetre, a hiperbolikus síkbeli (4,5,4,5) mozaikra vizsgáljuk meg a kristálynövekedési hányadost.

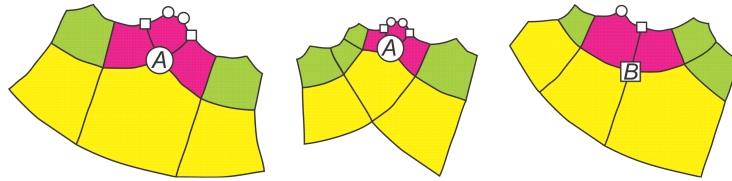
2. A 0. övezet egy szabályos ötszög

Tekintsük a (4,5,4,5) félig szabályos hiperbolikus mozaikot. A mozaik minden csúcspontjában kettő szabályos négyszög és kettő szabályos ötszög váltakozva érintkezik. Legyen a 0. övezet a mozaik egy szabályos ötszöge (1. ábra). Az ábrán az első néhány övezet elemei azonos színekkel (azonos árnyalattal) vannak jelölve.



1. ábra

A 0. övezet ötszögének csúcsait nevezzük A típusú pontoknak. Továbbá az egyes övezeteken lévő minden olyan ötszög pontot A típusúnak hívunk, melyekhez csak egy i . övezetbeli mozaikelem tartozik. A másik három elem a következő övezetben van. Legyen az i . övezeten levő csúcspont B típusú, ha két i . és két $(i + 1)$. övezetbeli elem közös csúcspontja (2. ábra). Jelölje a_i az i . övezetbeli A típusú pontok számát, b_i az i . övezetbeli B típusú pontok számát. Ekkor az 1. ábra alapján $a_0 = 5$, $b_0 = 0$ és $r_0 = 5$, valamint $a_1 = 10$, $b_1 = 10$ és $r_1 = 10$, továbbá $a_2 = 25$, $b_2 = 30$ és $r_2 = 30$.



2. ábra

Tétel. Minden i -re teljesül, hogy $a_{i+1} = 2a_i + \frac{1}{2}b_i$, $b_{i+1} = 2a_i + b_i$ és $r_{i+1} = 2a_i + b_i$.

BIZONYÍTÁS. A fentiek alapján láthatjuk, hogy az állítás $i = 0$ és $i = 1$ esetén teljesül. Most tegyük fel, hogy tetszőleges i -re is igaz a tétel. Az i . övezet külső határán lévő egyes A és B típusú pontokhoz rendeljük hozzá azokat az $(i + 1)$. övezet külső határán levő csúcspontokat, melyek mozaik élek számát tekintve a legközelebb vannak az adott ponthoz. Kör, illetve négyzet jelöli ezeket az új A , illetve B típusú pontokat (2. ábra). A hozzárendelés az A pontok esetén egyértelmű, de egy B ponthoz hozzárendelt új A típusú pont egy másik i . övezetbeli ponttól is két „élhossz” távolságra van. Az ilyen pontok számát, a többszöri beszámolás miatt, csak $\frac{1}{2}$ -es szorzóval vesszük figyelembe az adott B pontnál. Így adódik, hogy az A pontok esetén az új A , illetve B pontok száma is 2 , i . övezetbeli B pontok esetén pedig 1 és $\frac{1}{2}$.

Hasonlóan minden csúcsponthoz csatlakozik a következő övezetből három vagy kettő mozaik elem. Egy tetszőleges A pont esetén egy mozaik cella (szabályos ötszög) csatlakozik kizárólag a tekintett ponthoz, a másik kettő cella mindegyike egy-egy további i . övezetbeli ponthoz is csatlakozik. Hasonlóan az előzőekhez, a multiplicitás elkerülése végett, csak a számuk felét vesszük figyelembe a tekintett A ponthoz, azaz számuk összesen $1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$. Hasonlóan számolva egy tetszőleges B pont esetén $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ új cellát kapunk. A 2. ábrán látható eseteken kívül több eset nincs. ■

Az 0. tételben szereplő a_i és b_i rekurzív sorozatok közötti összefüggést írjuk fel mátrixos formában. Ekkor

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},$$

ahol

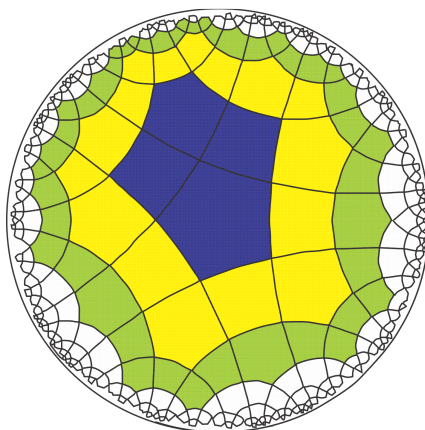
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ismert, hogy a $\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)$ határérték megegyezik az \mathbf{M} mátrix legnagyobb valós sajátértékével [3] [4] [5]. Ezek a sajátértékek a $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ és a $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, ami bizonyítja a következő tételt.

1. Tétel. A (4,5,4,5) hiperbolikus félig szabályos mozaik kristálynövekedési hányadosa $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,6180$.

2. A 0. övezet egy csúcspont

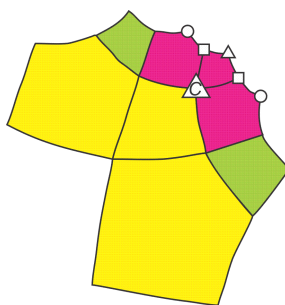
Vizsgáljuk meg a mozaikot arra az esetre, ha a 0. övezetnek egy csúcspontot tekintünk (3. ábra). Ekkor definiálnunk kell egy C típusú pontot is. Legyen egy i . övezet külső határán lévő csúcspont C típusú, ha csak egy i . övezetbeli négyszögnek csúcspontja. Ekkor a 3. ábra alapján $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ és $r_0 = 0$, valamint $a_1 = 4$, $b_1 = 4$, $c_1 = 2$ és $r_1 = 4$, továbbá $a_2 = 12$, $b_2 = 16$, $c_2 = 2$ és $r_2 = 16$.



3. ábra

3. Tétel. Minden $i \geq 1$ -re teljesül, hogy $a_{i+1} = 2a_i + \frac{1}{2}b_i + c_i$, $b_{i+1} = 2a_i + b_i + 2c_i$, $c_{i+1} = c_i$ és $r_{i+1} = 2a_i + b_i + 2c_i$.

BIZONYÍTÁS. A tétel bizonyítása teljesen hasonló az 0. tétel bizonyításához. A C ponthoz hozzá rendelt új csúcspontok számát a 4. ábráról le lehet olvasni. Az ábrán a C pontokat háromszöggel jelöljük.

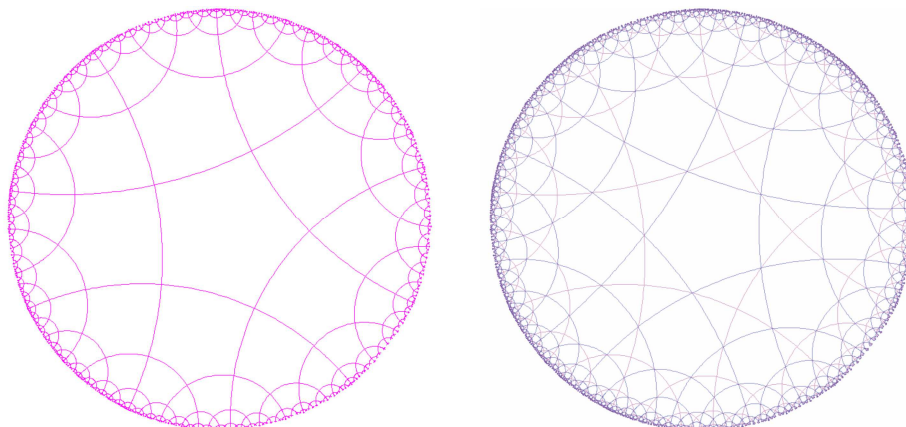


4. ábra

Ebben az esetben kapott $M = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékei nyilvánvalóan megegyeznek az előző esethez tartozó rekurzió mátrixának sajátértékeivel, tehát a $\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)$ határérték sem adhat más eredményt.

3. Az {5,4} szabályos és a (4,5,4,5) félig szabályos hiperbolikus mozaikok összehasonlítása

A (4,5,4,5) félig szabályos mozaik az {5,4} szabályos hiperbolikus mozaikból csonkolással származtatható. Ha az {5,4} mozaik minden ötszögét a szomszédos oldalfelező pontok által meghatározott egyenesek mentén levágjuk és a kapcsolódó levágott részeket egyesítjük a négyszögekből és ötszögekből álló mozaikot kapjuk. Ez az 5. ábrán jól látható.



5. ábra

Ha a (4,5,4,5) mozaik minden négyzetét az átlóik mentén felvágjuk háromszögekre és a szomszédos ötszögekkel egyesítjük, akkor az {5,4} mozaikot kapjuk. Felmerülhet a kérdés, hogy mivel a két mozaik egymásból származtatható, a szerkezetük nagyon hasonló, esetleg a kristálynövekedési hányadosuk is megegyezik. Mégis, [1] és [5] alapján az {5,4} mozaik kristálynövekedési hányadosa $2 + \sqrt{3}$, ami nem egyezik meg a fent kiszámolttal.

Irodalomjegyzék

- [1] Horváth, J., Über die regulären Mosaiken der hyperbolischen Ebene, Annales Univ. Sci., Budapest, Sectio Math. 7 (1964), 49-53.
- [2] Kárteszi, F., Eine Bemerkung über das Dreiecksnetz der hyperbolischen Ebene, Publ. Math., Debrecen, 5 (1957), 142-146.
- [3] Németh, L., Combinatorial examination of mosaics with asymptotic pyramids and their reciprocals in 3-dimensional hyperbolic space, Studia Sci. Math., 43 (2), Budapest, (2006), 247-265.
- [4] Németh, L., On the 4-dimensional hyperbolic hypercube mosaic, Publ. Math., Debrecen, Publ. Math. 70/3-4, (2007), 291-305.
- [5] Németh, L., Crystal-growing ration of the hyperbolic honeycombs with bounded cells, (közlésre leadva).
- [6] Vermes, I., Über die Parkettierungsmöglichkeit der hyperbolischen Ebene durch nicht-total asymptotische Vielecke. Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle, 1 (1971), 9-13.
- [7] Zeitler, H., Über eine Parkettierung des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes, Annales Univ. Sci., Budapest, Sectio Math. XII (1969), 3-10.